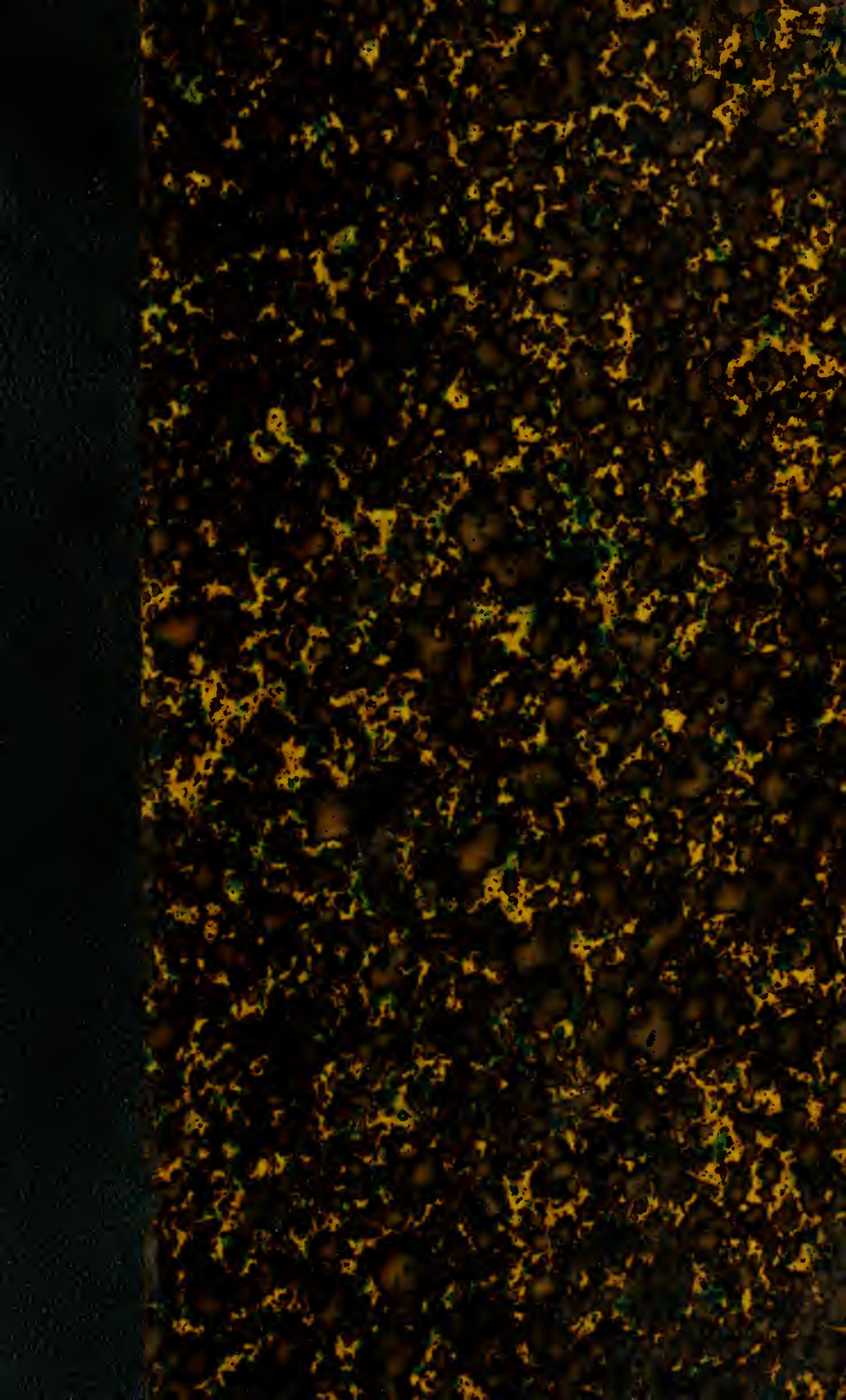
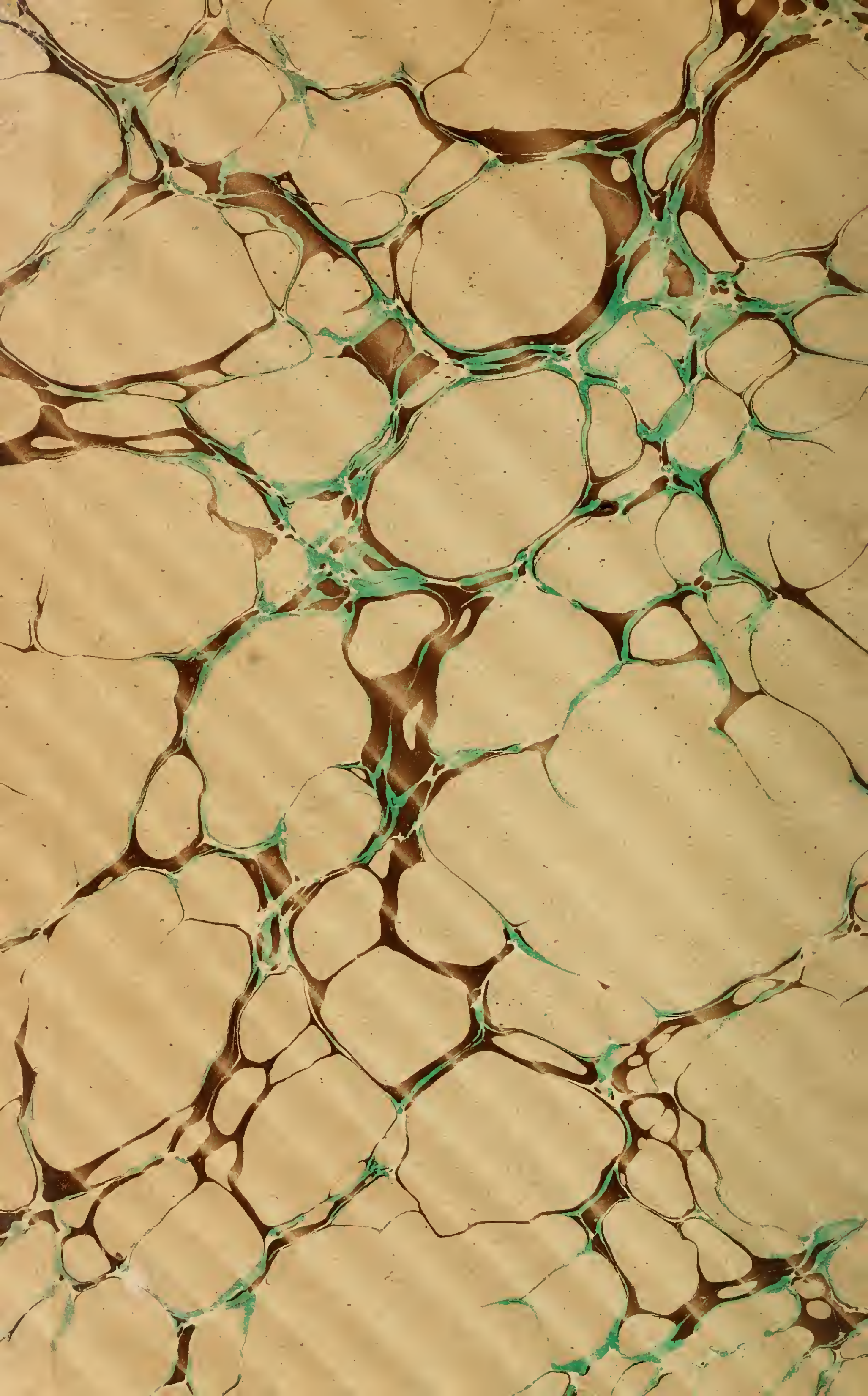
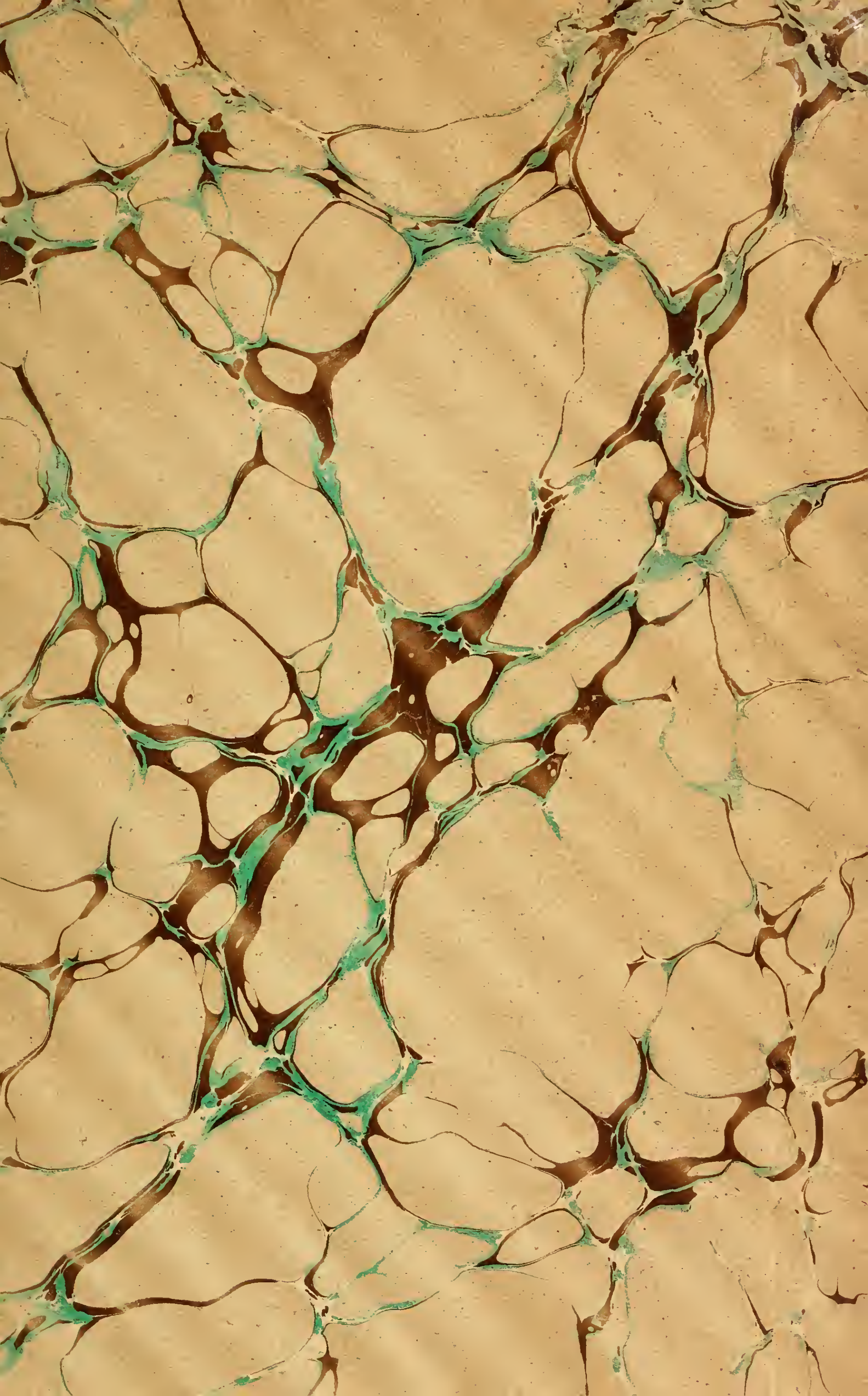






THÉORIE MATHÉMATIQUE

DES

ASSURANCES SUR LA VIE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

THÉORIE MATHÉMATIQUE

DES

ASSURANCES SUR LA VIE,

PAR

ÉMILE DORMOY.

TOME PREMIER.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1878

PRÉFACE.

Les Assurances sur la vie ont donné lieu en France à un assez grand nombre d'ouvrages et de publications périodiques, où elles sont envisagées sous le côté purement pratique, ou bien au point de vue du droit, de la jurisprudence, de la statistique. Au point de vue mathématique au contraire, elles n'ont donné lieu jusqu'à ce jour qu'à bien peu de travaux.

En 1835, M. de Courcy publiait, avec le concours de M. Lévy, professeur de Mathématiques distingué, une traduction du *Traité des Assurances sur la Vie* de Baily, ouvrage classique en Angleterre depuis 1812. En 1863, M. Charlon faisait paraître une *Étude sur la tarification des Transactions viagères,* opuscule où sont exposés d'une manière concise les principes fondamentaux du calcul des Tarifs d'assurances. En 1867, M. Myrtil Maas publiait son *Traité élémentaire des Annuités viagères,* ouvrage plus développé que le précédent, où les diverses questions relatives aux Assurances sur la vie commencent à se grouper en faisceau scientifique, et sont traitées avec une simplicité et une clarté attrayantes. La fondation de la *Société des Actuaires français* en 1872 vint donner quelque impulsion à ce genre d'études. Un grand nombre de questions concernant les transactions viagères ont été étudiées

et résolues au point de vue mathématique dans le *Journal des Actuaires français,* recueil trimestriel qui en est aujourd'hui à sa septième année d'existence. Ces travaux sont dus pour la plupart à MM. Achard, de Kertanguy, Charlon, Maas, Laurent et Jaÿ. C'est dans ce même recueil qu'a paru, de 1874 à 1877, le texte du présent Ouvrage. J'ai cherché à y condenser en un corps de doctrine toutes les questions pratiques qui concernent les Tables de mortalité, et le calcul des Tarifs d'Assurances et des Réserves. J'ai dû laisser de côté bien des aperçus ingénieux appartenant à la Théorie pure, afin de ne pas trop étendre les limites d'un Traité qui ne doit contenir que les solutions devenues classiques. J'ai fait suivre le texte de nombreuses Tables numériques, qui dispenseront les assureurs et les assurés de recourir aux formules. Je m'estimerai heureux si j'ai pu contribuer à propager en France l'étude de la Science des Actuaires et le goût des Assurances sur la vie.

Em. DORMOY.

Janvier 1878.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME PREMIER.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME Ier.

THÉORIE MATHÉMATIQUE

DES

OPÉRATIONS FINANCIÈRES

ET VIAGÈRES.

DEUXIÈME PARTIE.

THÉORIE MATHÉMATIQUE DES OPÉRATIONS VIAGÈRES.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA PROBABILITÉ.

1. Les assurances sur la vie et les autres opérations viagères reposent sur l'application du Calcul des probabilités aux chances de mortalité des personnes qui en sont l'objet. Il est donc utile, avant d'entreprendre l'étude de ces opérations, de rappeler les principes élémentaires du Calcul des probabilités.

Quand un événement attendu peut donner lieu à plusieurs résultats différents, chacun apprécie, suivant son jugement particulier, quelle probabilité il peut y avoir que tel ou tel résultat se présentera. On demande, par exemple, s'il pleuvra demain : un citadin pourra répondre que ce n'est pas probable; un agriculteur, que c'est assez probable; un marin, que c'est très-probable. La diversité des jugements de ces

trois personnes tient à ce qu'elles connaissent en partie, mais pas exactement, les causes multiples qui déterminent l'arrivée de la pluie, et qu'elles apprécient chacune à leur manière l'influence de ces causes.

Quand on veut donner un peu de précision à l'estimation d'une probabilité et sortir des termes généraux peu probable, assez probable, très-probable, il faut adopter pour les probabilités une mesure commune. On a adopté universellement cette convention que la certitude est représentée par 1, et que les divers degrés de probabilité sont représentés par toutes les fractions comprises entre zéro et 1. Au lieu de dire qu'un événement est peu probable, on dira qu'on estime sa probabilité à $\frac{1}{10}$ par exemple; au lieu de dire qu'il est très-probable, on dira qu'on l'estime à $\frac{8}{10}$ ou à $\frac{9}{10}$ ou à $\frac{99}{100}$.

2. Tous les événements qui se passent sur le globe dépendent de causes déterminées, mais que nous ne connaissons presque jamais exactement. Chacun de nous peut classer les événements futurs en trois catégories, suivant que les causes qui l'amènent lui sont complétement connues, ou partiellement connues, ou complétement inconnues.

3. Quand les causes d'un événement sont complétement connues d'un homme, il n'y a pas pour lui de probabilité à l'égard du résultat de cet événement : il y a une certitude. On demande par exemple si, en multipliant 14 par 14, on trouvera comme résultat 196 : tout le monde peut se convaincre que ce résultat est infaillible, et tout le monde évaluera la probabilité de son arrivée à 1, ce qui représente une certitude. On demande si une personne déterminée vivra encore 200 ans : tout le monde sait que c'est impossible, et tout le monde évaluera la probabilité de cet événement à zéro, ce qui représente encore une certitude.

On demande si, en mesurant deux édifices, on trouvera pour le premier une hauteur plus grande que pour le second.

Pour une personne qui connaîtrait d'avance exactement la hauteur de tous les deux, il n'y aurait pas là de probabilité, mais une certitude dans un sens ou dans l'autre. Pour les personnes qui ne connaissent pas exactement les hauteurs demandées, il y a matière à un doute, à une appréciation, et, par conséquent, à l'estimation d'une probabilité; pour elles, l'événement en question passe donc dans la seconde catégorie.

4. La plupart des événements humains font partie pour tous les hommes de la seconde catégorie. Presque tous sont soumis à des causes complexes que nous connaissons en partie, mais non en totalité, de sorte que leurs résultats sont abandonnés à nos appréciations, et que ces appréciations varient forcément avec le jugement, avec l'expérience de chacune des personnes qui veulent s'y livrer.

On entreprend une industrie nouvelle, et l'on demande quelle est sa probabilité de réussite. L'inventeur l'évalue à $\frac{9}{10}$; d'autres personnes à $\frac{8}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ peut-être : ceci est le résultat de leurs appréciations. On demande la probabilité qu'une personne désignée vivra encore plus de dix ans : il ne suffit pas de connaître son âge, il faut s'enquérir de son état de santé, de son tempérament, de son genre de vie. Si diverses personnes se livrent à cette enquête, toutes n'arriveront pas à la même appréciation : l'une pensera que cette probabilité est $\frac{6}{10}$, l'autre $\frac{4}{10}$ ou $\frac{3}{10}$ seulement. C'est la connaissance imparfaite des causes qui fait ainsi diverger les appréciations. S'il existe une intelligence suprême qui préside aux destinées de ce monde, qui voie tout, dans l'ordre matériel comme dans l'ordre moral, et qui soit en pleine connaissance de toutes les causes, aucun événement à venir ne reste incertain pour l'être infini qui la possède : il n'y a pas pour lui de probabilités, il n'y a que des certitudes; mais le monde humain est livré aux discussions et aux appréciations incertaines : *tradidit mundum disputationibus eorum*. Ainsi la probabilité d'un événement

attendu n'est pas un élément absolu, inhérent à l'événement ni à ses causes : c'est un élément qui dépend de l'appréciation de chacun, et qui varie avec l'intelligence de la personne qui se charge de cette appréciation.

5. La troisième catégorie est toute spéciale : elle comprend les événements dont nous ne connaissons nullement les causes, c'est-à-dire qui ne dépendent que du hasard. Il n'y a là qu'une synonymie de mots, car qu'est-ce que le hasard? C'est une cause que nous ne connaissons pas, dont nous ne pouvons pas calculer les effets, c'est *une cause incomprise*.

On a placé dans une urne 10 boules semblables, numérotées de 1 à 10 : on demande la probabilité que, en en tirant une au hasard, on amènera le n° 5. L'événement attendu a bien sa cause déterminée; tout dépend de la manière dont les boules auront été mélangées, et de la manière dont la main se portera sur elles; mais, comme ces causes sont indéchiffrables pour nous, c'est là, pour tout homme, un événement de pur hasard. Il y a dix cas possibles, tous sont également probables ; par conséquent, on ne peut assigner à chacun en particulier qu'une probabilité de $\frac{1}{10}$. C'est celle qu'on nomme la *probabilité mathématique*, c'est celle qui ne dépend pas des appréciations humaines. Lorsqu'on ne connaît rien concernant les causes, la seule manière d'évaluer la probabilité d'un événement attendu, c'est d'énumérer tous les cas divers et également probables qui peuvent se présenter, et de prendre pour la probabilité cherchée le rapport du nombre des cas favorables à l'événement attendu au nombre total des cas possibles.

6. Si l'on ne connaissait pas le nombre de boules qui se trouvent dans l'urne, et que l'on demandât néanmoins la probabilité d'amener le n° 5, on serait en face d'une difficulté bien plus grande encore, et l'on ne pourrait plus raisonnablement formuler aucun chiffre pour cette probabilité; mais on a recours alors à un artifice, qui consiste à se reporter,

quand cela est possible, au résultat de nombreuses épreuves faites antérieurement.

Supposons que, tout en ne connaissant pas la composition de l'urne, on ait à sa disposition les résultats d'un très-grand nombre de tirages antérieurs, et que, sur 1 million de tirages, on trouve que le n° 5 est sorti 100000 fois. On peut en conclure, avec très-peu de chances d'erreur, que le n° 5 avait une probabilité mathématique de $\frac{1}{10}$ de sortir à chaque tirage, et qu'il y avait, par conséquent, 10 boules dans l'urne; donc, pour un nouveau tirage que l'on va faire dans la même urne, on sera très-fondé à admettre encore $\frac{1}{10}$ pour sa probabilité d'arrivée.

7. Un grand nombre d'événements humains sont dans ce dernier cas. Nous voudrions évaluer leur probabilité d'arrivée, mais nous ne connaissons nullement les causes qui peuvent les amener; ou, ne connaissant ces causes que très-imparfaitement, nous craignons de nous tromper en cherchant à en apprécier l'influence par des raisonnements directs; ou encore nous n'avons pas, dans la pratique, la possibilité d'étudier chaque événement et de nous livrer à une enquête au sujet des causes particulières qui le dominent. Nous rejetons alors toutes les déductions directes. Nous préférons assimiler l'événement dont nous cherchons la probabilité à une nombreuse série d'événements analogues déjà observés antérieurement, et nous lui assignons, pour probabilité moyenne, la probabilité qui résulte de ces expériences antérieures. La science qui enregistre les résultats antérieurement observés des différentes séries d'événements analogues se nomme la *Statistique;* son domaine tend à s'agrandir tous les jours, et c'est sur ses résultats que nous basons nos appréciations pour l'avenir.

On demande, par exemple, combien il y aura de mariages en France d'ici à un an? Comme nous ne connaissons pas les causes qui peuvent amener des mariages dans toutes les familles,

nous nous reportons à la Statistique. Nous voyons qu'il y a eu depuis de longues années environ 8 mariages par 1000 habitants, et nous ne pouvons pas avoir moins de chances d'erreur qu'en admettant pour l'avenir la même proportion qui a été observée pour le passé. Il y a en France 36102921 habitants (recensement de 1872); nous évaluerons donc à 288823 le nombre probable des mariages qui se feront d'ici à un an.

On demande la probabilité qu'une personne déterminée, âgée de 40 ans, vivra encore dans vingt ans d'ici. Il serait impossible d'apprécier directement l'influence de toutes les causes qui peuvent amener son décès pendant ce laps de temps; on arrivera à beaucoup plus d'exactitude en s'en rapportant tout simplement aux résultats de la Statistique.

L'une des branches de cette science consiste précisément dans la formation des Tables de mortalité, qui indiquent combien, pendant les années écoulées, on a observé de décès sur les personnes de tel ou tel âge. Il a été dressé depuis longtemps des Tables de mortalité différentes, suivant les pays, suivant les professions des personnes soumises aux observations; on cherchera la Table qui s'applique à des personnes placées dans les mêmes conditions moyennes que la personne objet du problème, et l'on pourra admettre, sans trop d'erreur, que les chances de mortalité de celle-ci sont égales à celles qui se déduisent de la Table. On fera une erreur plus ou moins grande si l'on admet cette assimilation pour une seule tête; mais, si l'on opère sur un grand nombre de têtes, le raisonnement, ainsi que l'expérience, montre que toutes les erreurs en plus et en moins se balanceront à peu près, et que l'on arrivera ainsi à une approximation plus grande que par tout autre procédé.

CHAPITRE II.

CALCUL DES PROBABILITÉS.

8. Quand on veut appliquer le calcul aux probabilités, on doit avoir recours à chaque instant à quelques propositions élémentaires que nous allons énoncer. Pour la plupart d'entre elles, nous croyons pouvoir nous dispenser d'indiquer les démonstrations, que l'on trouvera dans tous les Ouvrages spéciaux, notamment dans le *Traité* de M. Laurent : nous aurons seulement à montrer l'enchaînement de ces diverses propositions. Nous rappelons d'abord qu'il n'est question, dans ce Chapitre, que de la probabilité mathématique, et que l'on appelle ainsi *le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas également possibles*.

Probabilité composée.

9. *Théorème I.* — Lorsqu'un événement ne peut arriver que par le concours de plusieurs autres, qui sont indépendants entre eux, la probabilité de cet événement est égale au produit des probabilités de tous les autres.

Exemple. — Une urne contient 10 boules blanches et 90 noires; une seconde urne contient 90 blanches et 10 noires; on demande la probabilité de tirer successivement une boule blanche de chacune d'elles.

La probabilité du premier événement est $\frac{1}{10}$, celle du second est $\frac{9}{10}$; la probabilité composée du concours de tous les deux est donc $\frac{9}{100}$.

10. *Théorème II.* — Lorsqu'un événement composé ne peut arriver que par le concours successif de deux autres, et que les résultats du premier influent sur la probabilité d'arrivée du second, la probabilité de l'événement composé est égale au produit de la probabilité du premier par la probabilité que possède le second, quand le premier est déjà arrivé.

Il en serait de même si, au lieu de deux événements successifs, il y en avait un plus grand nombre.

Exemple. — Sur 6 boules, numérotées de 1 à 6, on en tire une au hasard : on demande la probabilité d'amener un numéro qui soit à la fois impair et plus grand que 3.

La probabilité de tirer un numéro impair est $\frac{1}{2}$; la probabilité de tirer un numéro plus grand que 3 est aussi $\frac{1}{2}$. Si donc on appliquait le premier principe de la probabilité composée, on donnerait comme solution $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$. Mais ce serait inexact, parce qu'une fois qu'on sait que le premier événement a eu lieu, la probabilité du second a pris de nouvelles valeurs, suivant le résultat du premier. Si le premier événement a réussi, c'est qu'on a tiré 1, 3 ou 5; la probabilité que le numéro tiré est plus grand que 3 est donc $\frac{1}{3}$, et non plus $\frac{1}{2}$. La probabilité du double événement cherché est donc $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, et non $\frac{1}{4}$; et, en effet, on pouvait voir directement que le numéro 5 était le seul qui satisfît à la demande, et que la probabilité de l'amener était bien $\frac{1}{6}$.

Probabilité totale.

11. Lorsqu'un événement peut arriver par plusieurs causes indépendantes les unes des autres, si p_1 représente la probabilité que la première cause sera en jeu, et q_1 la probabilité que cette cause donne à l'arrivée de l'événement, si p_2, q_2,

p_3, q_3,... représentent des notations analogues pour les autres causes, la probabilité totale de l'événement attendu est égale à

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + \ldots. \tag{1}$$

Exemple. — On a 3 urnes, contenant chacune 3 boules blanches et 7 rouges, et 8 urnes contenant chacune 8 blanches et 2 rouges : on tire une boule d'une urne prise au hasard, et l'on demande la probabilité qu'elle sera blanche.

Il faut faire, dans la formule (1),

$$p_1 = \frac{3}{11}, \quad p_2 = \frac{8}{11}, \quad q_1 = \frac{3}{10}, \quad q_2 = \frac{8}{10},$$

ce qui donne, pour la probabilité cherchée,

$$\frac{3.3 + 8.8}{11.10} = 0,66.$$

12. *Théorème de Bayes.* — Un événement E peut arriver par plusieurs causes différentes c_1, c_2,..., qui toutes sont indépendantes et s'excluent mutuellement. Soient q_1 la probabilité que la cause c_1 sera en jeu, p_1 la probabilité d'arrivée qu'elle donne à l'événement E quand elle est en jeu, q_2, p_2, q_3, p_3,... des notations analogues. Supposons maintenant que l'événement E ait été observé dans une épreuve, mais sans que l'on sache quelle est la cause qui a été en jeu : la probabilité que cette cause est c_1 est égale à

$$\frac{p_1 q_1}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots}. \tag{2}$$

Exemple. — Une urne contient à la fois 10 boules blanches, dont 3 marquées d'une étoile; 20 rouges, dont 4 étoilées; et 30 noires, dont 5 étoilées. On en tire une au hasard, qui se trouve étoilée : on demande la probabilité qu'elle soit blanche.

On peut considérer les couleurs des boules comme des causes, dont les probabilités d'arrivée sont différentes, et respectivement égales à $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$; ces causes, une fois qu'on

sait qu'elles sont en jeu, donnent respectivement pour probabilité, à l'arrivée d'une boule étoilée, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{20}$ et $\frac{5}{30}$. Les premiers nombres sont ceux que nous avons représentés par q, et les seconds ceux que nous avons désignés par p; les produits $p_1 q_1$, $p_2 q_2$, $p_3 q_3$ sont donc ici $\frac{3}{60}$, $\frac{8}{120}$ et $\frac{15}{180}$, soit, en réduisant au même dénominateur, $\frac{18}{360}$, $\frac{24}{360}$ et $\frac{30}{360}$. La probabilité qu'elle est rouge est $\frac{24}{72}$ ou $\frac{1}{3}$; et la probabilité qu'elle est noire est $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

Probabilité des événements composés de la répétition des mêmes événements simples.

13. Soient p la probabilité d'un événement E, et q la probabilité de l'événement contraire F. On demande la probabilité que dans un nombre s d'épreuves l'événement E arrivera α fois, et l'événement F, β fois, $\alpha + \beta$ étant égal à s.

Cette probabilité est

$$\frac{s!}{\alpha!\,\beta!}\,p^\alpha q^\beta, \tag{3}$$

en employant la notation assez usitée $s!$ pour représenter le produit 1.2.3,..., s. Il est important de remarquer que, si l'on développe le polynôme $(p+q)^s$, cette probabilité sera précisément le terme de rang $\alpha + 1$ dans ce développement.

14. Quand α et β sont de très-grands nombres, on ne pourrait calculer exactement $s!$ $\alpha!$ et $\beta!$ qu'en faisant une longue série de multiplications, mais on peut en obtenir des valeurs très-approchées en faisant usage de la formule de Stirling.

D'après cette formule, l'expression

$$n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

donne une valeur très-approchée du produit 1.2.3,..., n. Il

en résulte que la probabilité calculée tout à l'heure a pour valeur

$$(4)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{s^{s+\frac{1}{2}}}{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}\,\beta^{\beta+\frac{1}{2}}}\,p^{\alpha}\,q^{\beta}.$$

Premier exemple. — Si l'on jette un dé 10 fois de suite, les probabilités que le point de 6 se présentera 0, 1, 2,..., 9 et 10 fois sont respectivement égales aux termes en q^0, q^1, $q^2,\ldots,q^9$, q^{10}, dans le développement du binôme

$$(p+q)^{10} = p^{10} + 10p^9q + 45p^8q^2 + 120p^7q^3 + 210p^6q^4 + 252p^5q^5 + 210p^4q^6 + 120p^3q^7 + 45p^2q^8 + 10pq^9 + q^{10},$$

dans lequel il faut faire $p = \frac{1}{6}$ et $q = \frac{5}{6}$. Ainsi la probabilité que le point de 6 se présentera précisément 3 fois est

$$120p^3q^7 = 120\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{120\times 5^7}{6^{10}} = 0,155.$$

La probabilité qu'il ne se présentera pas une seule fois serait égale à $q^{10} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 0,162$, et la probabilité qu'il se présentera 10 fois serait $p^{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^{10} = 0,000\,000\,08$.

Deuxième exemple. — On jette un dé 6000 fois : on demande la probabilité d'amener précisément 1000 fois le point de 6.

Comme les nombres sont considérables, on fera usage de la formule (4), qui donnera, pour valeur approchée de la probabilité cherchée,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{6000^{6000,5}}{1000^{1000,5}\,5000^{5000,5}}\left(\frac{1}{6}\right)^{1000}\left(\frac{5}{6}\right)^{5000},$$

nombre que l'on peut calculer par logarithmes, et pour la valeur duquel on trouve 0,0138301.

15. *Quel est, dans une série de s épreuves, le nombre de fois que l'événement* E *a le plus de chances de se présenter?*

Pour résoudre cette question, il suffit de se rappeler que,

d'après le n° 13, les termes du développement de $(p+q)^s$ représentent respectivement les probabilités que l'événement aura lieu 0, 1, 2,..., s fois dans s épreuves. Pour trouver le nombre de fois que cet événement a le plus de chances de se présenter, il suffit donc de chercher quel est, dans le développement du binôme $(p+q)^s$, le terme le plus grand en valeur absolue. Si l'on représente par α le nombre de fois cherché, on voit facilement que α est le plus grand nombre entier compris dans $p(s+1)$. De même β, ou $s-\alpha$ sera le plus grand nombre entier compris dans $q(s+1)$.

Exemple. — Reprenons le second exemple du n° 14, et supposons que l'on demande, sur 6000 tirages, quel est le nombre de fois que le point de 6 a le plus de chances de se présenter. Ce nombre est le plus grand entier compris dans $p(s+1)$, c'est-à-dire dans $\frac{1}{6}\,6001$: c'est donc 1000.

Bien que cet événement, l'arrivée du point de 6 précisément 1000 fois, soit le plus probable de tous ceux qui peuvent se présenter, nous avons vu au n° 13 qu'il n'avait lui-même qu'une probabilité très-faible, égale à 0,0138. Cela tient à ce que le nombre de combinaisons différentes qui peuvent se présenter est très-grand. Il est ici de 6001; car le point de 6 peut, dans les 6000 épreuves, se présenter zéro fois, ou 1, 2, 3 fois, enfin 5999 et même 6000 fois. Seulement les nombres extrêmes représentent des combinaisons dont la probabilité devient infiniment faible. Ainsi la probabilité que le point de 6 se présentera 6000 fois en 6000 tirages n'est que $\frac{1}{6^{6000}}$, quantité plus faible que tout ce qu'on peut imaginer.

En pratique, quand le nombre s des épreuves est un peu grand, le nombre de fois que l'événement se présente s'écarte peu du nombre normal, c'est-à-dire du nombre possédant la plus grande probabilité, lequel est égal à $p(s+1)$, ou ce qui revient au même à ps, nombre d'épreuves multiplié par la fraction qui indique la probabilité d'arrivée dans une épreuve

isolée; mais c'est rester dans le vague que de se borner à dire qu'il s'en écarte peu. Si l'on veut serrer la décomposition de plus près, il faut alors poser la question qui fait l'objet du numéro suivant.

16. *Quelle est la probabilité pour que, dans une série de s épreuves, l'événement* E, *dont la probabilité est p, se présente un nombre de fois compris entre $\alpha + l$ et $\alpha - l$?*

C'est évidemment la somme des probabilités que cet événement se présentera $\alpha - l$ fois, $\alpha - l + 1$ fois,..., α fois, $\alpha + 1$ fois,..., et enfin $\alpha + l$ fois. C'est, par conséquent, en désignant toujours $1 - p$ par q, la somme des termes du développement de $(p+q)^s$ compris entre le terme en $p^{\alpha+l}$ et le terme en $p^{\alpha-l}$.

Chacune de ces probabilités serait donnée isolément par la formule du nº 13

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{s^{s+\frac{1}{2}}}{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}} \beta^{\beta+\frac{1}{2}}} p^\alpha q^\beta, \tag{4}$$

β représentant, pour abréger, $s - \alpha$, et leur somme n'est autre que l'intégrale, depuis $\alpha - l$ jusqu'à $\alpha + l$, de la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{s^{s+\frac{1}{2}}}{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}} \beta^{\beta+\frac{1}{2}}} p^x q^{s-x}\, dx.$$

17. Dans le cas général, il paraît impossible de déterminer cette intégrale par des méthodes expéditives; mais, en pratique, on a principalement à considérer le cas où le nombre d'arrivées α est précisément le nombre d'arrivées le plus probable, c'est-à-dire ps. On se propose alors de chercher la probabilité que le nombre d'arrivées obtenu ne s'écartera pas de plus de l, en plus ou en moins, du nombre d'arrivées le plus probable.

Dans ce cas particulier, cette intégrale a pour valeur approchée

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l}{\sqrt{2pqs}}} e^{-\gamma^2}\, d\gamma, \tag{5}$$

pourvu que p ne soit pas trop petit. Cette formule donne alors une approximation raisonnable; mais elle serait illusoire si l'on voulait l'appliquer aux cas où p est très-petit par rapport à $\frac{1}{s}$, ou même de l'ordre de $\frac{1}{s}$.

18. On représente généralement l'expression $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma e^{-\gamma^2}\,d\gamma$ par la notation abrégée $\Theta(\gamma)$, et la probabilité cherchée se représente alors par la notation $\Theta\left(\frac{l}{\sqrt{2pqs}}\right)$.

Cette fonction $\Theta(\gamma)$ joue un rôle important dans le Calcul des probabilités.

On a calculé d'avance une Table qui donne ses valeurs pour toutes les valeurs de γ. Voici cette Table, telle qu'elle est rapportée dans le numéro d'avril 1872 du *Journal des Actuaires anglais*. Si l'on n'a pas besoin d'une grande approximation, il suffira de noter :

1° Que, quand γ varie de zéro à 0,61, $\Theta(\gamma)$ est un peu plus grand que γ, mais sans que la différence atteigne jamais 0,03;

2° Que, pour $\gamma = 0,615$, $\Theta(\gamma)$ est égal à γ;

3° Que, quand γ est plus grand que 0,615, $\Theta(\gamma)$ est plus petit que lui, et que la différence va sans cesse en augmentant;

4° Que, pour $\gamma = 1,17$, $\Theta(\gamma) = 0,9$; pour $\gamma = 1,83$, $\Theta(\gamma) = 0,99$; pour $\gamma = 2,32$, $\Theta(\gamma) = 0,999$; pour $\gamma = \infty$, $\Theta(\gamma)$ est égal à l'unité.

Table des valeurs de $\Theta(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-\gamma^2}\, d\gamma$.

γ.	Θ(γ).	γ.	Θ(γ).	γ.	Θ(γ).	γ.	Θ(γ).
0,00	0,0000	0,43	0,4569	0,86	0,7761	1,29	0,9319
0,01	0,0113	0,44	0,4662	0,87	0,7814	1,30	0,9340
0,02	0,0226	0,45	0,4755	0,88	0,7867	1,31	0,9361
0,03	0,0338	0,46	0,4847	0,89	0,7918	1,32	0,9381
0,04	0,0451	0,47	0,4937	0,90	0,7969	1,33	0,9400
0,05	0,0564	0,48	0,5027	0,91	0,8019	1,34	0,9419
0,06	0,0676	0,49	0,5117	0,92	0,8068	1,35	0,9438
0,07	0,0789	0,50	0,5205	0,93	0,8116	1,36	0,9456
0,08	0,0901	0,51	0,5292	0,94	0,8163	1,37	0,9473
0,09	0,1013	0,52	0,5379	0,95	0,8209	1,38	0,9490
0,10	0,1125	0,53	0,5465	0,96	0,8254	1,39	0,9507
0,11	0,1236	0,54	0,5549	0,97	0,8299	1,40	0,9523
0,12	0,1348	0,55	0,5633	0,98	0,8342	1,41	0,9539
0,13	0,1459	0,56	0,5716	0,99	0,8385	1,42	0,9554
0,14	0,1569	0,57	0,5798	1,00	0,8427	1,43	0,9569
0,15	0,1680	0,58	0,5879	1,01	0,8468	1,44	0,9583
0,16	0,1790	0,59	0,5959	1,02	0,8508	1,45	0,9597
0,17	0,1900	0,60	0,6039	1,03	0,8548	1,46	0,9611
0,18	0,2009	0,61	0,6117	1,04	0,8586	1,47	0,9624
0,19	0,2118	0,62	0,6194	1,05	0,8624	1,48	0,9637
0,20	0,2227	0,63	0,6270	1,06	0,8661	1,49	0,9649
0,21	0,2335	0,64	0,6346	1,07	0,8698	1,50	0,9661
0,22	0,2443	0,65	0,6420	1,08	0,8733	1,51	0,9673
0,23	0,2550	0,66	0,6494	1,09	0,8768	1,52	0,9684
0,24	0,2657	0,67	0,6566	1,10	0,8802	1,53	0,9695
0,25	0,2763	0,68	0,6638	1,11	0,8835	1,54	0,9706
0,26	0,2869	0,69	0,6708	1,12	0,8868	1,55	0,9716
0,27	0,2974	0,70	0,6778	1,13	0,8900	1,56	0,9726
0,28	0,3079	0,71	0,6847	1,14	0,8931	1,57	0,9736
0,29	0,3183	0,72	0,6914	1,15	0,8961	1,58	0,9745
0,30	0,3286	0,73	0,6981	1,16	0,8991	1,59	0,9755
0,31	0,3389	0,74	0,7047	1,17	0,9020	1,60	0,9763
0,32	0,3491	0,75	0,7112	1,18	0,9048	1,61	0,9772
0,33	0,3593	0,76	0,7175	1,19	0,9076	1,62	0,9780
0,34	0,3694	0,77	0,7238	1,20	0,9103	1,63	0,9788
0,35	0,3794	0,78	0,7300	1,21	0,9130	1,64	0,9796
0,36	0,3893	0,79	0,7361	1,22	0,9155	1,65	0,9804
0,37	0,3992	0,80	0,7421	1,23	0,9181	1,66	0,9811
0,38	0,4090	0,81	0,7480	1,24	0,9205	1,67	0,9818
0,39	0,4187	0,82	0,7538	1,25	0,9229	1,68	0,9825
0,40	0,4284	0,83	0,7595	1,26	0,9252	1,69	0,9832
0,41	0,4380	0,84	0,7651	1,27	0,9275	1,70	0,9838
0,42	0,4475	0,85	0,7707	1,28	0,9297	1,71	0,9844

Table des valeurs de $\Theta(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-\gamma^2} d\gamma$. (Suite.)

γ.	$\Theta(\gamma)$.	γ.	$\Theta(\gamma)$.	γ.	$\Theta(\gamma)$.	γ.	$\Theta(\gamma)$.
1,72	0,9850	1,93	0,9937	2,14	0,9975	2,35	0,9991
1,73	0,9856	1,94	0,9939	2,15	0,9976	2,36	0,9992
1,74	0,9861	1,95	0,9942	2,16	0,9977	2,37	0,9992
1,75	0,9867	1,96	0,9944	2,17	0,9979	2,38	0,9992
1,76	0,9872	1,97	0,9947	2,18	0,9980	2,39	0,9993
1,77	0,9877	1,98	0,9949	2,19	0,9980	2,40	0,9993
1,78	0,9882	1,99	0,9951	2,20	0,9981	2,41	0,9993
1,79	0,9886	2,00	0,9953	2,21	9,9982	2,42	0,9994
1,80	0,9891	2,01	0,9955	2,22	0,9983	2,43	0,9994
1,81	0,9895	2,02	0,9957	2,23	0,9984	2,44	0,9994
1,82	0,9899	2,03	0,9959	2,24	0,9985	2,45	0,9995
1,83	0,9903	2,04	0,9961	2,25	0,9985	2,46	0,9995
1,84	0,9907	2,05	0,9963	2,26	0,9986	2,47	0,9995
1,85	0,9911	2,06	0,9964	2,27	0,9987	2,48	0,9995
1,86	0,9915	2,07	0,9966	2,28	0,9987	2,49	0,9996
1,87	0,9918	2,08	0,9967	2,29	0,9988	2,50	0,9996
1,88	0,9922	2,09	0,9969	2,30	0,9989	2,51	0,9996
1,89	0,9925	2,10	0,9970	2,31	0,9989	2,52	0,9996
1,90	0,9928	2,11	0,9972	2,32	0,9990	2,53	0,9997
1,91	0,9931	2,12	0,9973	2,33	0,9990	2,54	0,9997
1,92	0,9934	2,13	0,9974	2,34	0,9991	2,55	0,9997
						∞	1,0000

19. Il résulte des théorèmes des n°s 15 et 16 que, si un événement a une probabilité d'arrivée p dans chaque épreuve, et que l'on fasse un grand nombre d'épreuves s, il est probable qu'il se présentera un nombre de fois α peu différent de ps. Cependant ce nombre d'arrivées ne sera pas exactement ps; il oscillera entre certaines limites $ps + l$ et $ps - l$; et, par les formules que nous venons de rappeler, on peut calculer, pour chaque valeur de l, la probabilité qu'il ne dépassera pas ces limites. Réciproquement, si s et α sont donnés par l'expérience, et que l'inconnue soit la probabilité p, cette probabilité p sera peu différente de $\frac{\alpha}{s}$; elle ne s'en éloignera que d'une quantité ε en plus ou en moins; et, pour chaque

valeur de ε, on peut calculer la probabilité P que la valeur de p ne dépassera pas les limites $\frac{\alpha}{s} + \varepsilon$ et $\frac{\alpha}{s} - \varepsilon$.

Un théorème, dû à J. Bernoulli, permet, quand s est assez grand, de resserrer dans d'étroites limites l'incertitude qui peut exister sur la valeur de p. Voici l'énoncé de ce théorème :

20. *Théorème de Bernoulli. — Soient p la probabilité d'un événement* E, *α le nombre de fois qu'il se présente dans s épreuves; soit* P *la probabilité que la différence entre p et $\frac{\alpha}{s}$ sera inférieure en valeur absolue à ε. On peut toujours prendre s assez grand pour que* P *diffère de l'unité aussi peu que l'on voudra.*

21. *Généralisation du théorème de Bernoulli.* — Ce théorème ne s'applique qu'à un événement simple E, dont la probabilité p reste constante à chaque épreuve. Poisson l'a généralisé, en l'appliquant au cas où la probabilité de l'événement change à chaque épreuve, et ce savant a formulé ainsi une loi à laquelle il a donné le nom de *loi des grands nombres*. Nous la rapportons ici, après avoir fait subir à son énoncé une correction qui a été indiquée par M. Bienaymé.

Loi des grands nombres. — Soient $p_1, p_2, \ldots, p_s$ les probabilités d'arrivées de l'événement E aux épreuves n°s 1, 2,..., s, et $q_1, q_2, \ldots, q_s$ les probabilités de l'événement contraire, en sorte que $p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = \ldots = p_s + q_s = 1$. Désignons par Σpq la somme des produits partiels $p_1 q_1, p_2 q_2, \ldots, p_s q_s$; par $\Theta(x)$ la fonction

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2}\, dx;$$

par N le plus grand nombre entier contenu dans la somme des probabilités $p_1 + p_2 + \ldots$; et par Q la probabilité que l'événement E, pendant les s épreuves, se présentera un nombre de fois compris entre $\mathrm{N} - l$ et $\mathrm{N} + l$: la probabilité Q est représentée, avec une grande approximation, par la formule

$$(10) \qquad Q = \Theta\left(\frac{l}{\sqrt{2\Sigma pq}}\right).$$

Quand toutes les probabilités p_1, p_2,... sont égales entre elles, et égales à p, on retombe sur les théorèmes qui font l'objet des numéros précédents : la valeur de Q redevient égale à celle qui est donnée au n° 18, puisque la somme Σ des termes pq devient elle-même égale à spq. Comme le théorème de Bernoulli peut se déduire de cette formule, on voit qu'il n'est lui-même qu'un cas particulier de la *loi des grands nombres*.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES ÉCARTS.

22. Nous avons vu que, lorsqu'on fait un certain nombre s d'épreuves répétées, le nombre de fois qu'un événement E, dont la probabilité est p à chaque épreuve, a le plus de chances de se présenter est égal à sp ou au plus grand nombre entier contenu dans sp. Nous avons calculé également quelle probabilité il y avait d'obtenir un nombre d'arrivées quelconque, plus ou moins différent de sp. Plus ce nombre diffère de sp, et plus sa probabilité est faible; chaque différence positive ou négative, de part et d'autre de sp, a sa probabilité qui lui est propre.

On peut supposer que chaque épreuve donne lieu à un pari pour et contre l'arrivée de l'événement E, et, pour que le pari soit équitable, il faut que les enjeux pour et contre l'événement soient fixés dans la proportion des probabilités, c'est-à-dire que l'on paye p chaque fois que l'événement ne se présente pas, et que l'on reçoive q chaque fois qu'il se présente. Si l'événement se présente précisément p fois, on aura payé et reçu spq, et aucun des joueurs ne sera en perte ni en bénéfice.

L'événement ne pourra se présenter précisément sp fois que si sp est un nombre entier; dans le cas contraire, il y aura toujours une perte ou un bénéfice. Si l'on désigne par α le plus grand entier contenu dans $(s+1)\,p$, α sera le nombre d'arrivées pour lequel la différence sera la plus faible. Le joueur qui a parié pour l'arrivée de l'événement aura reçu αq et aura payé $(s-\alpha)\,p = sp - \alpha + \alpha q$. Sa perte sera donc de $sp - \alpha$.

23. Si E se présente $\alpha + l$ fois, le joueur A qui a parié pour son arrivée aura reçu $(\alpha + l)q$ et aura payé $(s - \alpha - l)p$: il aura donc gagné $\alpha + l - sp$. Si l'on représente par P_l la probabilité que cette différence $+l$ se présentera, le joueur A a une probabilité P_l de réaliser ainsi un bénéfice de $\alpha + l - sp$; il pourrait, avant de commencer la série des s épreuves, acheter ce bénéfice éventuel pour sa valeur mathématique, qui est $(\alpha + l - sp)P_l$. Il pourrait faire de même pour toutes les différences possibles, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de l qui sont tous les nombres entiers positifs compris entre zéro et $s - \alpha$, et tous les nombres entiers négatifs compris entre zéro et $-\alpha$. Il aurait ainsi à recevoir d'avance, pour l'éventualité de toutes les différences positives, une somme

$$\sum_0^{s-\alpha} (\alpha + l - sp) P_l,$$

et à payer, pour l'éventualité de toutes les différences négatives, une somme $\sum_{-\alpha}^{0} (\alpha + l - sp)P_l$. Ces deux sommes sont égales, et le joueur A qui céderait ainsi d'avance toutes ses chances, bonnes et mauvaises, ne serait ni en perte ni en bénéfice.

24. Nous nommerons *écart* la perte ou le gain réalisé par le joueur A sur chaque série de s épreuves, c'est-à-dire la quantité $\alpha + l - sp$, l étant la différence entre le nombre d'arrivées réel et le nombre normal α. Nous nommerons de même *écart moyen* e la somme pour laquelle, avant de commencer chaque série de s épreuves, on pourrait acheter à leur valeur soit le gain, soit la perte que l'on peut réaliser par suite de tous les écarts possibles, c'est-à-dire que nous poserons

$$(11) \qquad e = \sum_0^{s-\alpha} = \sum_{-\alpha}^{0} = \frac{1}{2} \sum_{-\alpha}^{s-\alpha} (\alpha + l - sp) P_l.$$

25. Proposons-nous de chercher une formule simple donnant la valeur de e.

Les s épreuves que l'on effectue peuvent donner $s + 1$ combinaisons plus ou moins probables, suivant qu'elles contiendront 0, 1, 2,... ou s arrivées. Si l'on appelle α le plus grand multiple de $\frac{1}{p}$ contenu dans s, c'est-à-dire si l'on pose

$$s = \frac{1}{p}\alpha + \varepsilon,$$

ε étant $< \frac{1}{p}$, toutes les épreuves qui ne contiendront pas au moins $\alpha + 1$ arrivées donneront de la perte, perte qui ne peut se réduire à zéro que si s est un multiple exact de $\frac{1}{p}$. La combinaison qui contient α arrivées de l'événement et $s - \alpha$ arrivées de l'événement contraire donnera lieu à un gain de αq et à une perte de $(s - \alpha)p$. La probabilité que cette combinaison se présentera est

$$\frac{s.s-1\ldots s-\alpha+1}{1.2\ldots\alpha} p^\alpha q^{s-\alpha}.$$

On peut donc, avant de commencer l'épreuve, fixer la valeur éventuelle du résultat produit par cette combinaison à

$$\frac{s\ldots s-\alpha+1}{1\ldots\alpha} p^\alpha q^{s-\alpha} \alpha q - \frac{s\ldots s-\alpha+1}{1\ldots\alpha} p^\alpha q^{s-\alpha}(s-\alpha)p.$$

De même, on peut fixer la valeur éventuelle du résultat produit par la combinaison correspondant à $\alpha - 1$ arrivées à

$$\frac{s\ldots s-\alpha}{1\ldots\alpha-1} p^{\alpha-s} q^{s-\alpha+1}(\alpha-1)q - \frac{s\ldots s-\alpha}{1\ldots\alpha-1} p^{\alpha-1} q^{s-\alpha+1}(s-\alpha+1)q,$$

et la valeur éventuelle correspondant à $\alpha - 2$ arrivées à

$$\frac{s\ldots s-\alpha-1}{1\ldots\alpha-2} p^{\alpha-2} q^{s-\alpha+2}(\alpha-2)q - \frac{s\ldots s-\alpha-1}{1\ldots\alpha-2} p^{\alpha-2} q^{s-\alpha+2}(s-\alpha+2)q,$$

etc....

Si l'on ajoute toutes ces valeurs, on aura la valeur éventuelle de l'ensemble de la perte, c'est-à-dire ce que nous avons nommé l'*écart moyen*.

Or on remarquera de suite que cette addition est extrêmement simple; car le terme positif de la première valeur est identique au terme négatif de la deuxième, quels que soient p, q, s et α; le terme positif de la deuxième est identique au terme négatif de la troisième, et ainsi de suite. La dernière valeur se réduirait à un terme positif nul et à un terme négatif annulant le terme positif de l'avant-dernière, de sorte que le résultat définitif de l'addition de toutes ces valeurs se réduira au terme négatif de la première, soit à une perte de

$$(12) \qquad \frac{s.s-1\ldots(s-\alpha+1}{1.2\ldots\alpha} p^{\alpha} q^{s-\alpha}(s-\alpha)p,$$

en valeur absolue.

26. Dans les questions que l'on peut avoir à résoudre dans la pratique, on fait toujours assez d'épreuves pour que l'événement attendu se présente un grand nombre de fois, c'est-à-dire que s contient toujours un grand nombre de fois $\frac{1}{p}$. On peut alors, dans la valeur de $s = \frac{1}{p}\alpha + \varepsilon$, négliger ε qui est plus petit que $\frac{1}{p}$, par rapport à $\frac{1}{p}\alpha$, ce qui revient à supposer que s est un multiple exact de $\frac{1}{p}$. Ainsi, si l'événement attendu a une probabilité d'environ $\frac{2}{100}$, comme dans les questions de mortalité, on peut supposer que le nombre des épreuves, ou le nombre de têtes sur lequel on opère, est un multiple de 50, l'écart moyen que l'on obtiendrait pour une autre valeur de s ne différant nullement de l'écart moyen relatif au multiple de 50 le plus rapproché. La formule (12) ci-dessus se simplifie alors beaucoup. En posant $s = \frac{1}{p}\alpha$ ou $\alpha = sp$ et $s - \alpha = sq$, elle devient

$$e_s = \frac{s(s-1)\ldots sq+1}{1\ldots sp} p^{sq} q^{sp} spq,$$

et, en évaluant le numérateur et le dénominateur par la for-

mule de Stirling, elle se réduit à

(13) $$e_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{spq},$$

ou, avec une approximation plus que suffisante dans la pratique,

(14) $$e_s = 0,40\sqrt{spq}.$$

27. D'après le nº 22, cette formule est établie en supposant que l'on paye q chaque fois que l'événement arrive, et que l'on reçoit p chaque fois qu'il n'arrive pas. Or il revient au même de payer 1 chaque fois que l'événement arrive, et de recevoir p à chaque épreuve, soit en tout sp, ou encore de payer simplement 1 pour chaque arrivée dépassant le nombre de sp. Ainsi l'écart probable donné par la formule (14) représente également la valeur, prise avant de commencer les épreuves, de tous les écarts en plus qui peuvent se présenter, chacun d'eux étant compté pour le nombre d'unités dont il dépasse le nombre normal d'arrivées sp. Il représente aussi la valeur de tous les écarts en moins qui peuvent se présenter, chacun étant compté pour le nombre d'unités dont il est inférieur à sq.

Si l'on voulait racheter à la fois les écarts en plus et les écarts en moins qui peuvent se produire, il faudrait, avant de commencer les épreuves, payer une somme $2e_s$, c'est-à-dire que, si l'on veut compter chaque écart en plus ou en moins, de part et d'autre du nombre normal sp, pour autant d'unités qu'il en contient, la valeur probable du nombre ainsi obtenu est, avant de commencer les épreuves,

(15) $$2e_s = 0,80\sqrt{spq}.$$

28. En d'autres termes, quand on fait un grand nombre d'observations d'un événement de pur hasard, dont la probabilité d'arrivée est constante à chaque épreuve et égale à p, que l'on n'a rien à payer ni à recevoir à chaque arrivée, mais

qu'on se propose simplement d'observer le nombre d'arrivées a sur une série de s épreuves, la formule (14) indique encore la valeur moyenne de l'écart $a - sp$ en plus. La valeur de l'écart en moins $sp - a$ serait la même, de sorte que si l'on voulait avoir la valeur moyenne de l'écart, soit en plus, soit en moins, il faudrait prendre (15)

$$2e_s = 0,80\sqrt{spq}.$$

Ainsi quand un événement, ayant une probabilité p, est soumis à s épreuves répétées, le nombre d'arrivées le plus probable est bien sp; mais cependant ce nombre d'arrivées sp n'est jamais celui que l'on observera : il y aura toujours un certain écart. Il est impossible d'en prévoir le sens, mais on peut en déterminer la quotité : c'est la valeur de e_s indiquée ci-dessus. Si l'on fait plusieurs séries de s épreuves, et qu'on prenne à la fois la moyenne, en valeur absolue, de tous les écarts obtenus, on trouvera toujours que cette moyenne est à peu près égale à e_s. Il serait contraire à la nature des choses de trouver à la fin des épreuves un écart moyen beaucoup plus grand que e_s, et il serait tout aussi contraire à la nature de trouver que les écarts se sont compensés et que l'on arrive à un écart moyen égal à zéro, ou seulement beaucoup plus faible que e_s. Ainsi, pour emprunter une comparaison à la Mécanique, le nombre d'arrivées le plus probable sp est une sorte d'axe, autour duquel oscillent les nombres d'arrivées qui se produisent réellement dans la pratique. Ces oscillations se produisent dans les deux sens, et, quand on fait une série d'épreuves, on ne sait jamais si l'oscillation aura lieu à droite ou à gauche; mais il faut qu'il y en ait une. Bien plus, il faut que toutes ces oscillations aient en définitive une amplitude moyenne égale à e_s. N'y a-t-il pas une harmonie admirable dans ces lois du hasard? Des oscillations nulles, ce serait la mort; des oscillations exagérées, ce serait le désordre. On retrouve ici ce qu'on admire à chaque pas dans la nature, l'ordre et l'harmonie dans la variété.

29. L'examen de la formule générale (14) donne lieu aux remarques suivantes :

1° Pour un même événement, p et q restant constants, l'écart moyen augmente comme la racine carrée du nombre des épreuves. Ainsi, si $p = \frac{2}{100}$, $q = \frac{98}{100}$, comme dans les questions de mortalité, on a

$$e_s = 0,40 \frac{\sqrt{196}}{100} \sqrt{s} = 0,056 \sqrt{s},$$

soit, pour $s = 1000$ épreuves,

$$e_{1000} = 1,77,$$

c'est-à-dire que, sur 1000 épreuves, il doit y avoir 20 arrivées de l'événement, que la valeur de toutes les arrivées qui peuvent excéder le nombre de 20 est de 1,77, et que la valeur de l'écart qui peut se produire, en plus ou en moins sur le nombre 20, est $2e_s$ ou 3,54. De même, pour $s = 10000$,

$$e_{10000} = 5,60;$$

pour $s = 100000$,

$$e_{100000} = 17,70, \ldots.$$

2° Pour un même nombre s d'épreuves, s'il s'agit successivement d'événements divers dont les probabilités p sont différentes, comme $p + q$ est toujours égal à 1, le produit pq, et par conséquent aussi e_s, est d'autant plus grand que p et q sont plus rapprochés l'un de l'autre.

Ainsi, pour 10000 épreuves, quand il s'agissait d'un événement ayant une probabilité $\frac{2}{100}$, l'écart moyen était 5,60. S'il s'agit d'un autre événement ayant une probabilité $\frac{1}{10}$, la valeur de e devient

$$e = 0,40 \frac{\sqrt{9}}{10} \sqrt{10000} = 12.$$

Le maximum de l'écart moyen correspond au cas où $p = q = \frac{1}{2}$; il est égal, pour 10000 épreuves, à $0,40 \frac{100}{2} = 20$.

3° On peut encore supposer qu'on fait varier le nombre d'épreuves en raison inverse de la probabilité d'arrivée, c'est-à-dire qu'on fait toujours le nombre d'épreuves nécessaire pour amener en moyenne l'événement un même nombre de fois. C'est alors sp ou α qui est constant, et l'écart moyen prend la valeur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\alpha}\sqrt{q}$: il varie donc comme la racine carrée de la probabilité contraire à l'arrivée de l'événement, c'est-à-dire qu'il devient d'autant plus grand que l'événement est plus improbable. Ainsi, en faisant le nombre d'épreuves nécessaire pour amener en moyenne $\alpha = 100$ arrivées de l'événement, on obtient les résultats suivants :

Probabilité de	Nombre d'épreuves.	Écart moyen.
$\frac{1}{2}$	200	2,83
$\frac{1}{10}$	1000	3,80
$\frac{1}{100}$	10000	3,98
0	∞	4,00

30. Dans le cas particulier où l'événement a à chaque épreuve une probabilité $\frac{1}{2}$ de se présenter, il faut faire $p = q = \frac{1}{2}$, et l'écart moyen a pour valeur

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{s}{4}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\sqrt{s},$$

ou à très-peu près

(16) $$e_s = 0,20\sqrt{s}.$$

S'il s'agissait de la valeur des écarts en plus ou en moins, considérés en valeur absolue, il faudrait prendre, comme on l'a vu au n° **27**,

(17) $$2e_s = 0,40\sqrt{s}.$$

31. Dans ce cas particulier où p est égal à $\frac{1}{2}$, on peut trouver directement d'une autre manière la valeur de l'écart moyen. Pour cela, il faut étudier comment elle se forme pour trois valeurs consécutives de s, que nous supposerons égales, par exemple, à 7, 8 et 9.

Quand on fait 7 épreuves, les seules combinaisons donnant de la perte seront celles qui ne comprennent que 3, 2, 1, ou 0 arrivées de l'événement attendu. Les pertes sont représentées respectivement, dans ces quatre cas, par 1, 3, 5 et 7. Les probabilités de ces combinaisons sont respectivement

$$\frac{5.6.7}{1.2.3}\frac{1}{2^7},\quad \frac{6.7}{1.2}\frac{1}{2^7},\quad \frac{7}{1}\frac{1}{2^7}\quad \text{et}\quad \frac{1}{2^7}.$$

L'écart moyen est donc

$$e_7 = \frac{1}{2^7}\left(1\,\frac{5.6.7}{1.2.3} + 3\,\frac{6.7}{1.2} + 5\,\frac{7}{1} + 7\right).$$

On aura de même

$$e_8 = \frac{1}{2^8}\left(2\,\frac{6.7.8}{1.2.3} + 4\,\frac{7.8}{1.2} + 6\,\frac{8}{1} + 8\right),$$

$$e_9 = \frac{1}{2^9}\left(1\,\frac{6.7.8.9}{1.2.3.4} + 3\,\frac{7.8.9}{1.2.3} + 5\,\frac{8.9}{1.2} + 7\,\frac{9}{1} + 9\right).$$

Or, si l'on désigne pour un instant les coefficients entre parenthèses par M_7, M_8, M_9, en posant

$$e_7 = \frac{1}{2^7}M_7,$$

$$e_8 = \frac{1}{2^8}M_8,$$

$$e_9 = \frac{1}{2^9}M_9,$$

on remarquera que

$$M_8 = 2M_7,$$

$$M_9 = 2M_8 + \frac{M_9}{9} = \frac{9}{8}\,2M_8,$$

d'où l'on tirera

$$e_8 = e_7,$$

$$e_9 = \frac{9}{8} e_8 = \frac{9}{8} e_7.$$

Ces égalités étant générales, et dérivant de la loi même de formation des coefficients du binôme, on a, d'une manière générale,

$$e_{2\alpha} = e_{2\alpha-1},$$

$$e_{2\alpha+1} = \frac{2\alpha+1}{2\alpha} e_{2\alpha-1}.$$

Or, pour $s = 1$, la probabilité d'avoir une perte est $\frac{1}{2}$, et cette perte est alors $\frac{1}{2}$, puisque, d'après les données, on s'est engagé à payer p $\left(\text{ici } \frac{1}{2}\right)$ chaque fois que l'événement n'arrive pas, pour recevoir q $\left(\text{également } \frac{1}{2}\right)$ chaque fois qu'il arrive; par conséquent $e_1 = \frac{1}{4}$.

De même

$$e_2 = \frac{1}{4},$$

$$e_3 = e_4 = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2},$$

$$e_5 = e_6 = \frac{1}{4} \times \frac{3.5}{2.4}, \ldots,$$

et l'on aura pour la valeur générale de e_s, s étant pair ou impair, c'est-à-dire égal à 2α ou à $2\alpha - 1$,

$$e_s = e_{2\alpha} = e_{2\alpha-1} = \frac{1}{4} \frac{3.5.7\ldots 2\alpha - 1}{2.4.6\ldots 2\alpha - 2}.$$

On peut simplifier cette expression en la rapprochant de la formule de Wallis, qui donne

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots 2\alpha.2\alpha\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots(2\alpha-1)(2\alpha+1)\ldots},$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{3.5.7\ldots 2\alpha - 3\sqrt{2\alpha-1}}{2.4.6\ldots 2\alpha - 2},$$

d'où l'on peut conclure, comme ci-dessus,

$$e_{2\alpha} = e_{2\alpha-1} = e_s = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\sqrt{2\alpha - 1} = 0,20\sqrt{s}.$$

32. On peut, au moyen de la formule (16), calculer les chances de gain que présente un jeu de hasard pratiqué d'une manière suivie.

En pratique, on joue toujours contre une banque, qui conserve à chaque coup un léger avantage sur le joueur, afin de se couvrir de ses frais et de recueillir un bénéfice de son industrie. Cet avantage est un véritable impôt proportionnel, qui grève chaque coup joué, et dont on peut se racheter par une assurance faite à part. Ainsi le trente et quarante à un quart de refait, tel qu'il se joue à Monaco, grève le joueur d'un impôt de $6^{fr},50$ pour 1000 francs sur chaque coup joué : le joueur est donc dans la même position que s'il était affranchi du refait et jouait à chances égales, à la charge de payer à la banque, après le jeu fini, $6^{fr},50$ pour 1000 francs sur toutes les sommes qui ont été engagées.

Pour analyser la position du joueur, nous supposerons qu'il joue un certain nombre de coups s, en jouant à chaque fois une somme égale M. (Le résultat définitif serait exactement le même si, au lieu de jouer des sommes égales, il jouait sur les divers coups des sommes différentes, croissant ou décroissant suivant une loi quelconque.) D'après la formule (16), l'écart moyen, pour s coups, est égal à $0,20\text{M}\sqrt{s}$, soit en plus, soit en moins, c'est-à-dire que le joueur pourrait, sans perte ni gain probable, céder, avant de commencer le jeu, toutes ses chances de gain pour la somme $0,20\text{M}\sqrt{s}$, et aussi toutes ses chances de perte pour la même somme. Si l'on désigne le refait, ou l'impôt proportionnel qui frappe chaque coup joué, par r, on aura à payer, pour s coups joués, perdus ou gagnés, une somme $rs\text{M}$, de sorte qu'en tenant compte du refait le joueur pourrait, avant de commencer le jeu, céder toutes ses chances de bénéfice pour

$$0,20\text{M}\sqrt{s} - rs\text{M} = \text{M}\sqrt{s}(0,20 - r\sqrt{s}).$$

Si donc s est assez grand pour que $r\sqrt{s}$ soit égal à 0,20, c'est-à-dire si $s = \frac{1}{25r^2}$, le joueur pourrait équitablement céder toutes ses chances de bénéfice pour une somme inférieure à celle que le refait doit lui enlever.

Si le nombre de coups à jouer est plus grand que $\frac{1}{25r^2}$, le joueur est dans une condition plus défavorable encore : il peut d'avance céder pour une perte tout l'écart moyen, même quand il devrait se produire en sa faveur.

Lorsque r est égal à 0,0065, comme dans l'exemple ci-dessus, du jeu de trente et quarante de Monaco, le nombre de coups $\frac{1}{25r^2}$, au delà duquel il n'y a plus de bénéfice probable, ressort à 1000. Il ne serait que de 250 s'il s'agissait du trente et quarante au demi-refait où l'avantage du banquier est double. A la roulette à deux zéros, où l'avantage du banquier est de 0,05 sur chaque coup, le nombre de coups $\frac{1}{25r^2}$ calculé ci-dessus n'est que de 16.

Quant à la banque, sa position est aussi nette que celle du joueur : dès que le nombre de coups joués par elle (à des mises supposées égales) dépasse $\frac{1}{25r^2}$, elle ne doit plus être qu'en bénéfice, parce que le bénéfice qu'elle réalise sur les refaits dépasse l'écart moyen qui peut se produire sur les coups joués proprement dits, quand même cet écart se produirait dans le sens défavorable à la banque.

Une banque arrive promptement à jouer un nombre de coups plus grand que $\frac{1}{25r^2}$; car, à chaque table de trente et quarante, on joue environ 1200 coups par jour et 432000 coups par an. S'il y a en moyenne 2 tables de trente et quarante fonctionnant toute l'année, il se joue donc 864000 coups par an. En estimant l'ensemble des mises sur chaque coup à 500 francs, l'écart moyen à la fin de l'année est représenté par la formule $0,20 \times 500^{\text{fr}} \times \sqrt{864000}$, ce qui donne seulement 93000 francs, tandis que le refait aura produit une

somme de $rsM = 0{,}0065 \times 864000 \times 500 = 2800000^{fr}$. Il est donc d'une importance minime pour la banque que les coups joués donnent en eux-mêmes du bénéfice ou de la perte : à la fin de l'année, cela fait à peine varier son bénéfice net de 93000 francs, c'est-à-dire de $\frac{1}{30}$ de sa valeur, en plus ou en moins.

33. On peut appliquer la formule générale (15)

$$2e_s = 0{,}80\sqrt{spq}$$

à de nombreuses observations qui ont été faites sur des événements de pur hasard. Nous allons indiquer quelques résultats de ces applications.

Premier exemple. — Événement dont la probabilité p est $\frac{1}{10}$ à chaque épreuve.

Il a été fait 28800 épreuves, qui ont donné 2943 arrivées. L'écart est 63; l'écart $2e_s$ calculé par la formule est

$$0{,}80\sqrt{28800 \times \frac{9}{100}} = 41.$$

Si l'on groupe ces 28800 épreuves en 6 séries de 4800, on trouve les nombres d'arrivées suivants :

463, 505, 471, 506, 502, 496,

qui donnent pour écarts :

$$-17,\quad +25,\quad -9,\quad +26,\quad +22,\quad +16.$$

Somme des écarts en valeur absolue.......	115
Moyenne » »	19

La formule donne

$$0{,}80\sqrt{4800 \times \frac{9}{100}} = 11.$$

Si on les groupe en 24 séries de 1200 épreuves, on trouve pour la somme des écarts 156, et pour leur moyenne 7 : la for-

mule donne pour écart

$$0,80\sqrt{1200 \times \frac{9}{100}} = 8.$$

Si on les groupe en 192 séries de 150 épreuves, on obtient pour le total des écarts en plus et en moins 529, pour leur moyenne $\frac{529}{192} = 2,65$.

La formule $2e_s$ donnait pour cette moyenne

$$0,80\sqrt{\frac{150 \times 9}{100}} = 2,94.$$

La pratique donne donc des résultats qui concordent très-exactement avec ceux que la formule pouvait faire prévoir.

34. Deuxième exemple. — Événement dont la probabilité est $\frac{1}{50}$.

Il a été fait 38400 épreuves, qui ont donné 702 arrivées, soit un écart de 66. L'écart donné par la formule est

$$0,80\sqrt{38400\,\frac{49}{2500}} = 22.$$

Si l'on divise ces épreuves en 8 séries de 4800, on trouve une moyenne d'écarts de 10 : la formule donnait 8.

Si on les divise en 64 séries de 600 épreuves, on trouve une moyenne d'écarts de 2,91 : la formule donnait 2,74.

35. Troisième exemple. — Événement dont la probabilité d'arrivée est $\frac{3}{10}$.

Sur 3200 épreuves, il y a eu 964 arrivées. L'écart est 4 : la formule donnait

$$0,8\sqrt{3200 \times \frac{3 \times 7}{100}} = 21.$$

Si l'on divise ces épreuves en 4 séries de 800, on trouve pour la moyenne des écarts 5 : la formule donnait 10.

Si on les divise en 32 séries de 100, on trouve une moyenne d'écarts de 3 : la formule donnait 3,6.

36. Quatrième exemple. — Événement dont la probabilité d'arrivée est $\frac{1}{2}$.

Sur 600 épreuves, il y a eu 308 arrivées. L'écart est 8 : la formule donnait 10.

Si l'on divise ces épreuves en 10 séries de 60, on trouve pour la moyenne des écarts 2,8 : la formule donnait 3. Ainsi les résultats de la pratique correspondent parfaitement avec ceux de la formule (14) ; mais il faut pour cela que l'événement ait une probabilité constante à chaque épreuve, car c'est cette supposition qui a servi de base à tous les raisonnements sur lesquels nous nous sommes appuyés.

Quand l'événement n'a pas la même probabilité à chaque épreuve, la formule de l'écart moyen ne peut pas s'appliquer, et l'on s'en aperçoit de suite, parce que les essais pratiques donnent des résultats qui sont plus ou moins différents des valeurs de E_s.

37. Lorsqu'il ne s'agit que de raisonner sur les résultats d'épreuves déjà faites et que ces épreuves sont indépendantes les unes des autres, on peut toujours supposer que la probabilité de l'événement est la même à chaque épreuve. En effet, d'après nos définitions (nos 1 à 5), la probabilité d'un événement n'est pas un élément absolu, inhérent à cet événement lui-même : c'est un élément relatif, variant avec l'esprit de la personne qui s'occupe de l'évaluer. Si donc un événement a eu lieu a fois sur s épreuves, on peut admettre qu'il avait à chaque épreuve une probabilité d'arrivée $\frac{a}{s}$, et la formule (14) s'appliquera.

Mais, si les épreuves ne sont pas indépendantes les unes des autres, si elles sont soumises à des causes générales, de telle manière que le résultat des unes influe sur le résultat des autres, la formule ne peut plus s'appliquer. Il en serait ainsi, par exemple, si l'événement cherché était le tirage de boules

blanches dans une urne contenant des boules blanches et noires, mais où l'on ne remettrait pas les boules sorties après chaque épreuve. Le résultat des premiers tirages influant sur celui des tirages suivants, les probabilités ne sont pas constantes, les épreuves ne sont pas indépendantes les unes des autres, et la formule (14) ne peut pas s'appliquer.

38. Dans les applications, la recherche de l'écart moyen se présente souvent sous la forme suivante.

Un événement a une probabilité p de se présenter à chaque épreuve. On fait un nombre s d'épreuves en convenant que l'une des parties contractantes recevra de l'autre une somme fixe B à chaque épreuve, et lui payera une somme A chaque fois que l'événement se présentera. Pour qu'il y ait égalité dans les chances, B doit être fixé à la valeur $\mathrm{A}p$, de manière que, après s épreuves, on ait reçu et payé une somme probable égale à $\mathrm{A}ps$. Mais, comme il y aura nécessairement un écart, on demande pour quelle somme payée d'avance on pourrait céder la perte qui peut se produire, par suite d'un excès des sommes payées sur les sommes reçues.

La convention ci-dessus revient à recevoir $\mathrm{A}p$ quand l'événement ne se présente pas, et à payer $\mathrm{A}q$ quand il se présente. L'écart moyen est donc égal à celui que donne la formule (14), multiplié par A, c'est-à-dire à

$$\text{(18)} \qquad \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{spq} = 0{,}40\,\mathrm{A}\sqrt{spq}.$$

Premier exemple. — Une Compagnie d'assurances sur la vie a en cours 10000 polices d'assurances, en cas de décès, de 10000 francs chacune; elle estime la probabilité moyenne de décès de chaque assuré dans l'espace d'un an à 0,01. Le montant le plus probable des sinistres qu'elle aura à payer dans l'année est de 1 million, soit 100 sinistres de 10000 francs. On demande pour quelle somme elle pourrait à forfait, avant de commencer l'année, céder la perte additionnelle qu'elle peut avoir à supporter, c'est-à-dire l'écart qui pourra se produire en plus entre le chiffre prévu, 1 million, et le chiffre réel des sinistres.

Il faut, dans la formule (18), faire $A = 10000$, $s = 10000$, $p = 0,01$, $q = 0,99$, et l'on trouve

$$e = 39800^{\text{fr}}.$$

Telle est la somme cherchée.

Le calcul de cette somme ne se rapporte qu'à l'écart qui peut se produire en perte. Un écart semblable peut se produire en bénéfice, et l'on peut en céder la probabilité pour une somme exactement égale à 39800 francs.

S'il n'y avait que 1000 polices de 10000 francs en cours, cette somme serait de 12580 francs, par rapport à un chiffre probable de sinistres de 100000 francs. Elle est toujours d'autant plus forte absolument, mais d'autant plus faible par rapport au chiffre probable des sinistres que le nombre des affaires en cours est plus considérable. Elle varie comme la racine carrée du nombre de ces affaires, toutes étant supposées de même importance.

Deuxième exemple. — Une Compagnie d'assurances contre l'incendie a, sur une certaine classe d'affaires, 1 milliard de risques en cours avec une probabilité moyenne de $\frac{1}{5000}$, pour un an, d'avoir, sur chaque risque isolé, un sinistre que l'on suppose total. On demande, suivant le nombre s de risques entre lesquels se divise la somme assurée de 1 milliard, pour quelle somme elle pourrait, avant de commencer l'année, céder l'écart qui pourra se produire en plus, entre le chiffre réel des sinistres et le chiffre que l'on peut prévoir, lequel est de $\frac{1}{5000}$ de 1 milliard, ou 200000 francs. s étant le nombre de risques entre lesquels se divise la somme assurée de 1 milliard, chaque sinistre sera de $\frac{1\,000\,000\,000}{s}$, et la formule (18) donne

$$e = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{spq} = \frac{1\,000\,000\,000\sqrt{4999}}{5000\sqrt{2\pi}\sqrt{s}} = \frac{5641\,000}{\sqrt{s}}.$$

Ainsi l'écart moyen que cette Compagnie a à redouter diminue en raison de la racine carrée du nombre des risques, pour une même somme totale assurée.

La formule n'est applicable qu'à la condition que s soit au moins égal à 5000, nombre minimum de risques que la Compagnie doit posséder pour qu'un seul sinistre ne la constitue pas en perte. S'il n'y avait qu'un seul risque en cours, l'écart moyen serait égal à 1 milliard, perte possible, multipliée par la probabilité de son arrivée $\frac{1}{5000}$, soit précisément 200000 francs. Au delà de $s = 5000$, la formule peut s'appliquer, et elle donne les résultats suivants :

S'il y a

Risques.	Valeur de chacun.	L'écart moyen est de
	fr.	fr.
5000	200000	79780
10000...........	100000	56410
40000...........	25000	28200
100000...........	10000	17840
1 million	1000	5641
1 milliard........	1	178

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'appliquer la formule à une autre classe d'affaires comprenant des risques plus dangereux, dont la probabilité de sinistres soit de $\frac{1}{1000}$. Admettons que les risques en cours s'élèvent en totalité à 200 millions, de manière à présenter le même chiffre probable de sinistres, 200000 francs, et voyons quelles sont, dans ce nouvel exemple, les valeurs de l'écart moyen.

e est égal à $\frac{200\,000\,000}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{999}}{1000} \frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{2\,521\,900}{\sqrt{s}}$, formule qui donne pour

Risques.	Valeur de chacun.	L'écart moyen est de
	fr	fr
1000	200000,00	79750
5000	40000,00	35690
10000	20000,00	25219
40000	10000,00	12609
100000	2000,00	7795
1 million.........	200,00	2522
1 milliard	0fr,20c	79

Ainsi, de deux catégories d'affaires desquelles on attend le même chiffre moyen de sinistres, celle qui pour un même nombre de risques en cours donne les écarts moyens les plus faibles, c'est-à-dire celle qui présente le plus de régularité dans l'arrivée des sinistres est la catégorie où les risques sont le plus divisés.

Nous aurons à revenir sur ces considérations quand nous nous occuperons du *plein* des assurances.

39. Il est intéressant d'examiner, au point de vue de leurs écarts, les faits enregistrés par la Statistique, qui se produisent dans la nature ou dans la vie sociale. L'importance plus ou moins grande de leurs écarts pourra souvent jeter une vive lumière sur la nature des causes dont ces événements dépendent. On le comprendra facilement. Nous venons de voir en effet que, quand un événement était de pur hasard, c'est-à-dire quand, dans une série d'épreuves, les causes qui l'amènent sont indépendantes entre elles d'une épreuve à l'autre, les écarts suivaient une certaine loi régulière; que la moyenne de ces écarts ne s'éloignait pas sensiblement d'un nombre facile à calculer d'avance. La réciproque est vraie. Une série d'épreuves a amené un certain nombre de fois le même événement. Nous ne savons pas si les causes qui amènent l'événement ont ou n'ont pas de réactions les unes sur les autres; pour le savoir, nous n'avons qu'à examiner les écarts.

Si leur moyenne est à peu près égale à l'écart moyen calculé par la formule (14), nous pouvons en conclure que l'événement est de pur hasard, que les causes qui l'amènent dans les différentes épreuves sont indépendantes et sans réaction les unes sur les autres. Si, au contraire, la moyenne des écarts observés est différente de l'écart moyen calculé, nous pouvons affirmer que cette déviation est due à une réaction des épreuves les unes sur les autres; et, suivant que la différence sera plus ou moins grande, et aura lieu dans un sens ou dans l'autre, nous pourrons même acquérir quelques notions sur la nature et sur l'importance de cette réaction.

40. Pour appliquer la formule $e = 0,40 \sqrt{spq}$ à l'examen des écarts des faits naturels, il est bon de lui donner une autre forme.

On suppose qu'un événement présente à chaque épreuve une probabilité p qui est encore inconnue. On fait un grand nombre d'épreuves, que l'on partage en n séries, contenant respectivement $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ épreuves, sur un nombre total $s_1 + s_2 + \ldots + s_n = S$. L'événement se présente dans chaque série un certain nombre de fois, que l'on note; nous désignons ce nombre par $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et leur somme par A. La valeur que l'on peut le plus raisonnablement assigner à p est le rapport du nombre total d'arrivées A au nombre total d'épreuves S; ainsi l'on posera $p = \frac{A}{S}$, et $q = 1 - p = \frac{S - A}{S}$. Cela étant, la valeur la plus probable de a_h, nombre d'arrivées obtenu dans une épreuve quelconque, sera $ps_h = \frac{As_h}{S}$, et l'écart moyen en plus aura pour valeur

$$e_h = 0,40 \sqrt{s_h pq} = 0,40 \frac{\sqrt{A(S - A)}}{S} \sqrt{s_h}.$$

Généralement, les événements ne sont pas répartis au hasard en séries : les séries sont des années, ou des mois, ou des espaces égaux, qui contiennent à très-peu près le même nombre d'épreuves, de sorte que l'on peut poser, sans erreur sensible, $S = ns_h$; d'où pour la valeur commune de e, quel que soit le rang h de l'épreuve, $0,40 \sqrt{\frac{A(S - A)}{nS}}$.

Si, pour les n séries d'épreuves, on additionne ensemble, *en valeur absolue*, tous les écarts observés, positifs ou négatifs, on devra trouver n fois l'écart moyen ci-dessus pour les écarts en plus, n fois pour les écarts en moins, en tout $2n$ fois $0,40 \sqrt{\frac{A(S - A)}{nS}}$, soit $0,80 \sqrt{\frac{nA(S - A)}{S}}$. Désignant donc par E la somme, en valeur absolue, de tous les écarts obtenus, la transformation de la formule (14) donne pour

résultat

$$(19)\qquad E = 0{,}80\sqrt{\frac{n\,A(S-A)}{S}}.$$

C'est à cette valeur que l'on devra comparer la somme des écarts observés dans la pratique, et, suivant qu'il y aura égalité ou divergence, on pourra en tirer telle ou telle conclusion concernant les causes en jeu.

41. La manière la plus simple de faire cette comparaison est de diviser l'écart observé par l'écart calculé, et d'examiner le rapport ainsi obtenu, rapport auquel je donnerai le nom de *coefficient de divergence*.

Avant de commencer les épreuves, on prévoyait pour elles un certain résultat, qui n'est autre que le nombre d'arrivées le plus probable. Si les épreuves déjà faites n'influencent en rien les épreuves futures, on devra, après un certain nombre d'épreuves, prévoir encore le même résultat, et le coefficient de divergence, calculé après toutes les épreuves faites, se trouvera égal à 1. Si les épreuves déjà faites influencent celles qui sont à faire, de telle manière qu'elles rendent plus probable encore le résultat prévu d'abord, qu'elles facilitent son arrivée, il y aura tendance à une régularité plus grande que celle qui est dans la nature des faits indépendants, et l'on arrivera à un coefficient plus petit que 1. Si, au contraire, elles les influencent de manière à rendre moins probable le résultat prévu d'abord, de manière à faciliter les écarts, il y aura tendance à une irrégularité qui n'est pas dans la nature des faits indépendants les uns des autres, et le coefficient sera plus grand que 1.

Réciproquement, on peut en conclure qu'un coefficient égal à 1 indique des faits indépendants les uns des autres; un coefficient plus petit que 1, des faits plus réguliers, influencés, par conséquent, par une cause qui favorise la convergence; enfin un coefficient plus grand que 1 indique des faits plus irréguliers que la moyenne, qui sont influencés, par conséquent, par une cause qui pousse à la divergence.

42. La limite inférieure du coefficient de divergence est généralement zéro; car les événements peuvent toujours, dans chaque série d'épreuves, arriver précisément le nombre de fois que leur probabilité faisait prévoir. Quant à sa limite supérieure, elle varie, non avec la nature de l'événement, mais avec le nombre des épreuves faites et avec le nombre des arrivées obtenues.

L'écart maximum correspond en effet au cas où toutes les arrivées observées auraient lieu dans la même série d'épreuves, et il a alors pour valeur $2A\frac{n-1}{n}$, ce qui donne, pour le maximum du coefficient de divergence,

$$\frac{2A\frac{n-1}{n}}{0{,}80\sqrt{\frac{nA(s-A)}{s}}}=\frac{2{,}50\times(n-1)}{n\sqrt{n}}\sqrt{\frac{sA}{s-A}}=\frac{2{,}50\times(n-1)}{n}\sqrt{s\frac{p}{q}}.$$

43. Nous allons donner quelques exemples, en appliquant les considérations qui précèdent à l'étude de divers phénomènes.

Proportion des naissances masculines aux naissances totales. — Proposons-nous d'étudier comment se répartissent les naissances masculines par rapport aux naissances totales, pendant diverses périodes de temps.

A Paris, pendant onze ans, de 1856 à 1866, il y a eu 524738 naissances, dont 266747 masculines : la probabilité de chacune des naissances de cet intervalle de temps était donc $\frac{266747}{524738}$ ou 0,5083. En 1858, le nombre des naissances a été de 37451 : le nombre le plus probable de naissances masculines était donc $37451\times 0{,}5083=19038$. Le nombre réel a été 19073 : il y a donc eu un écart, en plus, de 35. En calculant de même les écarts qui se sont produits pendant ces onze années, et les additionnant en valeur absolue, on trouve que leur somme s'élève à 949. La formule donne, pour cette somme,

$$E=0{,}80\sqrt{\frac{11\times 266747\times 257991}{524738}}=961.$$

Ainsi le coefficient de divergence est $\frac{949}{961} = 0{,}98$: il est très-rapproché de l'unité, c'est-à-dire que, pendant cette période, les écarts entre les naissances des deux sexes ont suivi une marche normale et se sont conformés avec une grande approximation aux indications de la théorie.

La limite supérieure que ce coefficient aurait pu atteindre, si toutes les naissances masculines avaient eu lieu pendant les six premières années, et aucune pendant les cinq dernières, est environ 100.

Nous avons fait la même recherche, au sujet du phénomène en question, pour diverses parties de la France et pour diverses périodes de temps, et nous avons trouvé les résultats suivants :

Proportion des naissances masculines aux naissances totales.

		Coefficients de divergence.
Paris,	1816 à 1838	1,17
»	1856 à 1866	1,98
Indre-et-Loire,	1817 à 1837	1,28
»	1856 à 1864	0,84
Tours,	1857 à 1867	1,09
France,	1817 à 1826	1,57
»	1832 à 1841	1,38
»	1851 à 1864	1,38
»	12 mois de 1866	1,37
»	» 1868	0,90
»	24 mois de 1866 et 1868	1,26
»	12 mois de 1868. Population urbaine seule, plus le département de la Seine	0,87
»	12 mois de 1868. Population rurale seule, en ne comptant que les enfants nés vivants	0,65
»	Enfants naturels seulement. 1841 à 1850	1,64
»	id. 1851 à 1864	1,26
Indre-et-Loire,	id. 1856 à 1864	0,55
Tours,	id. 1857 à 1867	1,09

Ainsi, pour ce phénomène, le coefficient de divergence se tient toujours très-rapproché de l'unité : il varie seulement, pour les périodes auxquelles on a appliqué le calcul, de 0,55 à 1,64, ainsi que cela arrive dans les faits de pur hasard. Cela signifie que les naissances masculines proviennent de causes indépendantes les unes des autres; que celles qui se sont produites n'influent régulièrement ni pour favoriser, ni pour gêner celles qui ont encore à se produire; qu'à chaque épreuve, enfin, on se retrouve dans des conditions de chance identiques : c'est ce qu'on exprime, en langage ordinaire, en disant qu'*un tel événement ne dépend que du hasard.*

44. *Proportion des naissances naturelles aux naissances totales.* — Nous avons comparé de même le nombre des naissances naturelles au nombre total des naissances, et nous avons calculé, pour la France, les coefficients de divergence relatifs à plusieurs périodes décennales. Ces coefficients sont les suivants :

Pour les dix années	de 1817 à 1826......	15
»	1827 à 1836......	6
»	1837 à 1846......	6
»	1849 à 1858......	8
»	1858 à 1868......	5
Pour les vingt années	de 1849 à 1868......	7

Ces coefficients, sans dépasser une certaine limite, sont cependant toujours plus élevés que ceux que l'on obtenait à propos du phénomène précédent. Cela indique que le nombre des naissances naturelles n'est pas un fait de pur hasard ; que ces naissances ne sont pas indépendantes les unes des autres, qu'elles ont une cause commune, qui se développe par ses propres effets. Au point de vue social, cette cause est du reste bien connue : c'est la réaction des mauvais exemples sur l'état général des mœurs.

45. *Proportion des naissances à la population.* — Pour la

France, pendant les deux périodes décennales qui vont de 1849 à 1868, les coefficients de divergence sont les suivants :

Pour les dix années de	1849 à 1858......	32
»	1859 à 1868......	18

[La limite calculée par la formule (20) serait 70000].

L'élévation de ces coefficients prouve que le nombre des naissances, pour une population déterminée, n'est pas un fait de hasard, et que les naissances d'une année, comparées aux naissances d'une période de dix ans, sont influencées par des causes générales. Et, en effet, une épidémie, une guerre, de mauvaises récoltes influent d'une manière générale sur toutes les naissances, et en diminuent le nombre.

46. *Proportion des naissances naturelles à la population.* — Pour la France, pendant les trois périodes décennales qui vont de 1839 à 1868, les coefficients de divergence sont les suivants :

Pour les dix années :	de 1839 à 1848.....	12
»	de 1849 à 1858.....	8
»	de 1859 à 1868.....	10

La limite maximum serait 1700.

Ces coefficients sont à peu près les mêmes que ceux qui se rapportent aux naissances naturelles comparées aux naissances totales, mais ils sont notablement moins élevés que ceux qui se rapportent à la comparaison des naissances totales à la population, ce qui nous paraît démontrer :

1° Que les causes générales qui influent sur le nombre de naissances affectent moins les naissances naturelles que les naissances légitimes;

2° Que ce qui influe sur le nombre des naissances naturelles, c'est l'état des mœurs et la contagion du mauvais exemple, beaucoup plus que les causes générales qui affectent les naissances légitimes.

47. *Proportion des mariages à la population.* — Pour la France, les coefficients de divergence sont les suivants :

Pour les dix années :	de 1839 à 1848.....	25
»	de 1849 à 1858.....	19
»	de 1859 à 1868.....	9

La limite maximum serait de 3700.

48. *Proportion du nombre de naissances légitimes au nombre des femmes mariées âgées de 20 à 45 ans.* — Pour la France et pour les huit années de 1861 à 1868, le coefficient de divergence est 10.

Le nombre des mariages annuels et le nombre des naissances par ménage sont donc encore des faits influencés dans une large mesure par des causes générales, au nombre desquelles on peut compter l'aisance et la tranquillité qui règnent dans le pays.

49. *Proportion des décès à la population.* — Pour la France, les coefficients de divergence sont les suivants :

Pour les dix années :	de 1849 à 1858.....	86
»	de 1859 à 1868.....	63

La limite maximum serait 6600.

La grande élévation de ces coefficients prouve que les décès individuels sont loin d'être des faits isolés, se produisant par hasard, mais qu'ils dépendent de causes générales et communes, et ces causes ne sont en effet que trop connues : les principales sont les épidémies, les guerres, les mauvaises récoltes, etc.

50. *Proportion du nombre annuel des accusés à la population.* — On ne compte, comme dans les exemples qui suivent, que les accusés jugés contradictoirement par les Cours d'assises.

Pour la France et pour les vingt et une années comprises

entre 1826 et 1847, le coefficient de divergence est 6. Sa limite maximum serait environ 1000.

51. *Proportion du nombre des femmes accusées au nombre total des accusés.* — Le coefficient de divergence est seulement 2,30. Il est calculé, comme dans les exemples qui suivent, pour les années 1849 à 1864.

52. *Proportion du nombre des accusés célibataires au nombre total des accusés.* — Le coefficient de divergence est 3.

53. *Proportion du nombre des accusés âgés de* 21 *à* 30 *ans au nombre total des accusés.* — Le coefficient de divergence est seulement 1,75.

54. *Proportion du nombre des accusés ne sachant ni lire ni écrire au nombre total.* — Le coefficient est 5.

Ainsi des faits qui, comme les crimes, paraissent dépendre presque uniquement du libre arbitre individuel, sont cependant régis dans une large mesure par les mêmes lois que les événements de pur hasard; c'est ce qu'indiquent les coefficients ci-dessus, qui sont tous très-peu élevés. Il y a là un argument sérieux pour ceux qui pensent que l'homme, au moins dans l'ensemble de son espèce, est assujetti aux lois de la fatalité.

55. *Proportion du nombre annuel des morts accidentelles au chiffre de la population.* — Le coefficient est 11. Il y a ici une raison particulière pour que ce coefficient soit élevé, c'est que le nombre des morts accidentelles augmente chaque année, à cause du développement des chemins de fer, des machines à vapeur, de l'outillage industriel, etc.

56. *Proportion du nombre annuel des suicides au chiffre de la population.* — Le coefficient est 6. Le nombre des suicides, comme celui des morts accidentelles, augmente régulière-

ment chaque année, ce qui est une cause d'élévation pour le coefficient de divergence.

57. Dans certains phénomènes, la Statistique enregistre des nombres et des moyennes, mais sans pouvoir indiquer à quel nombre d'épreuves correspondent les nombres observés. Il en est ainsi, par exemple, dans la science météorologique, où l'on note les quantités de pluie tombée chaque jour en un lieu, l'état de l'atmosphère, la direction des vents, etc. Dans ce cas, la formule (19) peut encore s'appliquer, par extension, avec une approximation suffisante. Elle peut, en effet, se mettre sous la forme

$$0,80\sqrt{nA\left(1-\frac{A}{S}\right)}; \tag{20}$$

et comme, dans les questions dont il s'agit, S peut toujours être supposé très-grand par rapport à A, on peut admettre, pour l'écart moyen, la valeur

$$E' = 0,80\sqrt{nA}. \tag{21}$$

Le coefficient de divergence se calculera toujours de la même manière, en divisant l'écart résultant des observations faites par l'écart E' que donne la formule, et la limite maximum de ce coefficient, résultant de la formule (20) modifiée, sera

$$\frac{2,50 \times (n-1)}{n\sqrt{n}}\sqrt{A}. \tag{22}$$

Premier exemple. — *Quantité de pluie tombée pendant les divers jours d'un mois.* En janvier 1868, il est tombé en tout, à Verdun, 630 dixièmes de millimètre de hauteur d'eau, qui se sont répartis de la manière suivante : 2 le 3, 26 le 5, 15 le 7, 2 le 8, 13 le 12, 33 le 13, 12 le 14, 48 le 15, 7 le 17, 145 le 18, 85 le 20, 145 le 22, 44 le 25, et 53 le 28. La moyenne journalière est 20; les écarts qui se sont produits au-dessus de cette moyenne sont donc les suivants : 6 le 5, 13 le 13, 28 le 15, 125 le 18, 65 le 20, 125 le 22, 24 le 25, et

33 le 28. La somme des écarts en plus est 419; la somme des écarts en plus et en moins est double, soit 838. Le coefficient de divergence est donc

$$\frac{838}{0,80 \times \sqrt{30 \times 630}} = 8.$$

La limite maximum de ce coefficient était

$$\frac{2,50 \times 29}{30\sqrt{30}}\sqrt{630} = 11.$$

Si l'on cherche le même coefficient pour chacun des mois de l'année 1868, on trouve les valeurs suivantes :

8, 8, 4, 6, 7, 7, 9, 5, 9, 7, 9, 4,

et la limite maximum est toujours 11. On peut en conclure que, d'un jour à l'autre du même mois, le phénomène de la pluie n'est nullement un fait de hasard, mais qu'il est amené par des causes générales étendant leur influence sur tous les jours du mois.

Deuxième exemple. — *Quantité de pluie tombée pendant les divers mois d'une année.* Si, au lieu d'étudier les variations qui se produisent, pour ce même phénomène de la pluie, d'un jour à l'autre du mois, on étudie celles qui se produisent d'un mois à l'autre d'une même année, on trouve les coefficients suivants : 15 pour 1865, 14 pour 1866, 13 pour 1867, 9 pour 1868, et la limite maximum du coefficient est 60. Il y a donc encore des causes générales qui exercent une influence commune sur tous les mois d'une même année.

CHAPITRE IV.

TABLES DE MORTALITÉ.

§ I. — *Historique.*

58. L'usage de tenir note des naissances et des décès date d'une haute antiquité. Sans remonter plus haut que les Romains, nous voyons déjà des registres tenus à cet effet à Rome, sous le règne de Servius Tullius, 578 ans avant J.-C. Ces registres servaient à la perception d'un impôt que l'on devait payer : à la naissance, au temple de Junon Lucine, à la prise de la robe virile, au temple de la Jeunesse, au décès, au temple de Libitine. Les inscriptions étaient faites par les prêtres de ces divers temples. C'est sans doute de ces registres que le célèbre jurisconsulte Ulpien s'était servi pour calculer, 170 ans après J.-C., une sorte de Table de mortalité, d'après laquelle la vie moyenne était à 20 ans de 30 années, à 40 ans de 19, à 50 ans de 9, et à 60 ans de 5 années : tous ces chiffres sont plus petits de 10 années environ que les chiffres admis aujourd'hui pour la vie moyenne. Ulpien utilisait cette Table, non pas précisément pour des assurances sur la vie, mais pour une opération qui s'en rapproche beaucoup : il se proposait de calculer la valeur, en capital, d'un legs consistant en une rente viagère, lorsqu'un legs semblable se rencontrait dans une succession.

Pendant les premiers siècles du christianisme, le clergé continua à tenir note des naissances et des décès, avec plus ou moins de régularité. On signale des registres de paroisses régulièrement tenus à Augsbourg et à Breslau dès le commencement du XVIe siècle, puis en Angleterre, en 1538, d'après

les prescriptions de Cromwell. En 1592, on organise, à l'occasion de la peste de Londres, une statistique mortuaire dans laquelle on note les âges des décédés : cette statistique est continuée après la disparition de l'épidémie. En 1662, Petty et Graunt publient des statistiques mortuaires s'appliquant à Londres, Dublin et autres grandes villes ; Jean de Witt fait d'autres travaux en 1671. La première Table de mortalité méritant ce nom est celle que publie, en 1693, l'illustre mathématicien Halley, sur la ville de Breslau. A partir de Halley, la Statistique mortuaire fait de rapides progrès : Kerseboom, en 1738 ; Struyck, en 1740 ; Süssmilch, en 1741, publient des Tables de mortalité ; Deparcieux établit la sienne, en 1746 ; Dupré de Saint-Maur publie, en 1749, les résultats des registres de la ville de Paris ; puis viennent, en 1780, la Table de Northampton ; en 1787, celle de Carlisle ; en 1806, la Table de Duvillard ; en 1832, celle de Demontferraud ; quelques années après, celles de Finlaison et du D[r] Farr ; en 1843, la Table des dix-sept Compagnies d'assurances anglaises ; en 1867, la Table dressée par Beauvisage, d'après les résultats de la tontine Lafarge ; enfin, en 1869, la Table des vingt Compagnies anglaises. Il faut ajouter à ces travaux ceux qui ont été publiés périodiquement par diverses administrations dans la plupart des pays de l'Europe, notamment par le Bureau des Longitudes dans ses *Annuaires* et par le Ministère français de l'Agriculture et du Commerce, sous le titre de *Mouvement de la population.*

§ II. — *Degré d'approximation des Tables.*

59. Pour établir des assurances sur la vie, on a besoin d'estimer avec le plus d'exactitude possible les chances de mortalité des personnes à assurer ; car l'assureur doit évaluer à une somme d'argent déterminée l'importance de chacun des engagements qu'il a à contracter. Ainsi prenons pour exemple l'assurance temporaire d'un an, qui est la plus simple. On

demande à l'assureur de s'engager à payer un capital fixé, si une personne déterminée vient à mourir dans le délai d'un an. L'assureur aurait besoin de connaître : 1° l'âge de la personne à assurer ; 2° son état actuel de santé ; 3° son tempérament ; 4° le tempérament de ses parents ; 5° le climat qu'elle se propose d'habiter ; 6° son degré d'aisance ; 7° la nature de ses occupations ; 8° la nature plus ou moins aventureuse de son caractère, etc. C'est une étude qu'il aurait à recommencer au sujet de chacune des personnes à assurer ; mais cette étude nécessiterait une enquête qui serait complétement impossible en pratique. Cette enquête ne pourrait guère être faite que par le futur assuré lui-même, et encore faudrait-il que cet assuré fût aidé des conseils de son propre médecin. C'est, du reste, à peu près l'enquête à laquelle se livre intérieurement un homme qui a l'intention de s'assurer. Il examine toutes ses chances de décès, il tâche de les évaluer tant bien que mal, et il ne se décide à s'assurer que s'il suppose que ces chances sont assez grandes pour contre-balancer le sacrifice d'argent qui lui est demandé, sous forme de prime d'assurance.

Cette enquête est encore analogue à celle que font les assureurs maritimes, quand ils ont un navire à assurer : ils doivent rechercher quel est son âge, son mode de construction, son constructeur, le service qu'il doit faire, quelle est la prudence de son armateur, l'habileté de son capitaine, etc., et ils fixent la prime en raison des chances de sinistre, qu'ils évaluent. Il en est de même dans les assurances contre l'incendie ; on cherche quel est le mode de construction de la maison à assurer, quelles sont les marchandises qu'elle contient, quels sont les bâtiments contigus, etc., et l'on fixe la prime en raison des chances supposées de sinistre.

Mais, dans l'assurance sur la vie, il serait impossible à l'assureur de se livrer à cette enquête individuelle à propos de tous ses assurés. D'abord le temps manquerait, et ensuite on rencontrerait des obstacles insurmontables dans la juste susceptibilité des futurs assurés et dans le manque de franchise de leurs déclarations. Cette enquête individuelle étant impra-

ticable, il a donc fallu s'en passer et faire des assurances sur la vie sans avoir à sa disposition les résultats qu'elle aurait pu donner.

60. On a pris alors le parti d'éliminer de l'assurance sur la vie tous les gens qui présentent des chances de décès particulièrement défavorables, à l'un quelconque des sept ou huit points de vue énumérés plus haut. En conséquence, on n'assure ni les gens trop âgés, ni ceux qui sont actuellement malades, ni ceux qui ont un tempérament maladif ou qui doivent l'avoir en raison des antécédents de famille, ni ceux qui doivent habiter des climats dangereux, ni ceux qui sont soumis aux épreuves de la misère, ni ceux qui exercent une profession particulièrement dangereuse (militaires en campagne, marins, ouvriers de quelques rares industries), ni même ceux qui seraient d'un caractère trop porté aux périlleuses aventures. Toutes les personnes qui se trouvent dans les cas ci-dessus, et peut-être dans quelques autres, on ne les assure pas, au moins aux conditions ordinaires; on les considère comme présentant des risques exceptionnels, et on leur demande une prime plus forte, ce qui revient à dire qu'on les exclut des assurances contractées aux conditions générales. Nous n'avons donc pas à nous en occuper pour le moment.

Pour reconnaître si une personne qui demande à s'assurer se trouve dans l'un des cas ci-dessus spécifiés, il y a certainement une enquête à faire. Cette enquête est beaucoup moins minutieuse que celle dont nous parlions tout à l'heure : elle nécessite cependant certaines formalités. On demande à l'assuré de signer une déclaration écrite, de remettre un certificat de son propre médecin, et de se faire examiner par un autre médecin, spécialement délégué ; on prend en outre, auprès des personnes qui le connaissent, quelques renseignements sur son genre de vie et sur les motifs qui le décident à s'assurer. Cette enquête, bien qu'elle soit faite avec le plus de discrétion possible, apporte cependant encore de grands ob-

stacles à la conclusion des affaires ; mais il est impossible de s'en passer, si l'on veut opérer raisonnablement.

61. Quand l'assureur a fait, dans la population générale, toutes ces éliminations, il est certain de ne plus se trouver en présence que d'une classe déjà bien plus homogène, que l'on peut appeler la classe assurable; mais il peut aller encore beaucoup plus loin, par un moyen très-facile à mettre en pratique. En effet chacun des individus qui composent cette classe assurable se trouve encore marqué d'un signe particulier très-précieux, parce qu'il présente les trois caractères suivants : 1° il exerce une grande influence sur les chances de décès ; 2° il est presque impossible à frauder ; 3° il est facile à constater sans blesser presque aucune susceptibilité. Ce signe particulier, ce caractère indélébile que chacun porte avec lui, c'est son âge : c'est là le meilleur *criterium* de la longévité probable.

Il est important de remarquer que, si l'âge est le *criterium* de la longévité probable, c'est parce qu'il s'agit d'une couche de population qui, par les éliminations, a été rendue homogène sous tous les autres rapports. Il n'en serait plus de même s'il s'agissait d'une population d'où l'on n'aurait éliminé personne, parce que l'âge n'exercerait plus sur les probabilités de décès une influence aussi prépondérante. Aussi les Tables de mortalité ont-elles d'autant plus de valeur qu'elles sont dressées sur des couches de population plus homogènes.

C'est par la considération de l'âge que l'on établit, dans la classe assurable, des catégories définitives. On y fait généralement 100 catégories, parce qu'on ne considère que l'âge exact à une année près ; on en obtiendrait 1200 si l'on voulait pousser la division assez loin pour considérer l'âge exact à un mois près.

Chacune de ces catégories pourra encore être divisée en deux, dont l'une comprendra les hommes et l'autre les femmes. Le sexe, ce nouveau caractère distinctif, a en général peu

d'influence sur les chances de décès; cependant, comme il se constate de lui-même, sans aucune peine, dans la pratique de la vie sociale, on le prend également en considération, et l'on a à en tenir compte à certains âges.

Cette double division opérée, l'assureur se trouve en présence de couches de population bien distinctes par l'âge et par le sexe, et qu'il est obligé de considérer comme complétement homogènes, au point de vue des chances de mortalité. Sans doute, cette homogénéité n'est pas encore complète : il arrivera bien souvent que deux hommes de même âge, qui auront échappé aux éliminations, et qui feront partie, par conséquent, de la même catégorie, présenteront, aux yeux de tous, des chances de longévité bien différentes, en raison, par exemple, de leur constitution ou de la nature de leurs occupations. Mais, comme il n'y a pas de moyen simple et pratique de les différencier, on les laisse dans la même catégorie, et l'on admet que tous les individus composant une même catégorie ont exactement les mêmes chances de décès. On est amené alors à chercher quelle est l'importance de ces chances ; en d'autres termes, quelle est la probabilité qu'une personne d'un âge déterminé mourra dans le cours d'une année. Cette question ne peut se résoudre qu'en recourant à l'expérience des temps passés. Le bon sens dit que, si l'on a constaté pendant plusieurs années que sur 10 000 hommes de 30 ans, appartenant à une classe homogène comme l'est la classe assurable, il en est mort 84 pendant 1 an, c'est que la probabilité de décès de chacun était à peu près 0,0084 : on peut donc supposer qu'elle est encore la même, si l'on se trouve dans des conditions analogues, c'est-à-dire dans le même pays et à une époque peu éloignée.

62. Toutefois il faut se défier, dans tout ce qui touche aux évaluations des chances de mortalité, des aperçus du simple bon sens, et il est bon de les soumettre à un raisonnement rigoureux. Si l'on veut le faire, on voit que la proposition précédente peut se réduire à un double syllogisme.

Premier syllogisme. — *Majeure.* Sur 10 000 individus vivants de l'âge de 30 ans, il y a eu 84 décès de 30 à 31 ans.

Mineure. Les 10 000 individus observés avaient tous la même probabilité de décès en une année.

Conclusion. Cette probabilité était par conséquent $\frac{84}{10000}$.

Second syllogisme. — *Majeure.* Un individu nouveau, que l'on a en vue, a la même probabilité de décès qu'un quelconque des 10 000 qui précèdent.

Mineure et conclusion. Cette probabilité est donc $\frac{84}{10000}$.

63. Dans le premier syllogisme, la majeure résulte d'une constatation faite par l'expérience; si l'expérience, c'est-à-dire l'observation statistique, a été bien faite, on peut y avoir confiance. La mineure n'est pas complétement exacte, mais on l'a rendue aussi exacte que possible en pratiquant les éliminations nécessaires et en se procurant des catégories à peu près homogènes : reste la conclusion, qui est un pur problème de Calcul des probabilités. Ce problème, c'est celui qui a été indiqué dans les nos 16 et 17. On a observé un nombre s de têtes, c'est-à-dire qu'on a fait un nombre s d'épreuves, et un événement (qui est ici un décès) s'est présenté un nombre de fois α : l'inconnue est la probabilité p de cet événement. Cette probabilité sera peu différente de $\frac{\alpha}{s}$; elle ne s'en éloignera que d'une quantité l en plus ou en moins ; et, pour chaque valeur de l, on peut calculer la probabilité P que la valeur de p sera comprise entre les limites $\frac{\alpha}{s} + l$ et $\frac{\alpha}{s} - l$. Cette probabilité P est donnée par la formule suivante :

$$P = \Theta(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-\gamma^2} d\gamma, \tag{23}$$

en posant

$$\gamma = l \sqrt{\frac{s^3}{2\alpha\beta}}. \tag{24}$$

64. *Exemple.* — On a observé 29482 individus âgés de trente ans; on a constaté 248 décès dans une année, c'est-à-dire de l'âge de trente à trente et un ans. On en conclut que la chance de décès en un an, pour un individu de trente ans, est $\frac{248}{29482}$ ou 0,0084. On demande quelle est la probabilité que ce résultat est exact à moins de 0,001 près, c'est-à-dire que la véritable chance de décès cherchée est comprise entre 0,0074 et 0,0094.

Il faut faire, dans la formule précédente,

$$s = 29482,$$
$$\alpha = 248,$$
$$\beta = 29234,$$
$$l = 0,001.$$

On trouve alors

$$\gamma = 1,49 \quad \text{et} \quad P = \Theta(\gamma) = 0,96.$$

Ainsi il y a seulement 96 contre 4, ou 24 contre 1 à parier que la probabilité ou chance de décès cherchée est, en effet, comprise entre les limites indiquées entre 0,0074 et 0,0094. On ne peut donc nullement considérer le chiffre des dix-millièmes comme ayant une signification quelconque, et l'on ne peut compter que sur celui des millièmes.

Le nombre d'épreuves choisi dans cet exemple, 29482, est celui des individus âgés de trente ans, qui ont été observés pour la confection de la Table des vingt Compagnies anglaises; aucune Table de mortalité, dressée sur des têtes choisies, et d'après des documents certains, n'a jamais été faite d'après un plus grand nombre d'observations; les taux de mortalité afférents à chaque âge, considéré isolément, ne sont donc pas obtenus avec une approximation plus grande que celle qui vient d'être calculée.

65. C'est pour cette raison, et dans le but d'obtenir une approximation plus grande, que l'on a été conduit à *ajuster*

les Tables de mortalité, c'est-à-dire à modifier les résultats obtenus pour un âge considéré isolément, en tenant compte des résultats afférents aux âges voisins. Ainsi que nous le verrons plus loin (n° 93), on peut admettre que, par un ajustement bien combiné, on obtient la même approximation que si l'on avait opéré sur un nombre de têtes quatre fois plus grand. Si donc on demande la probabilité que la chance de décès à trente ans ci-dessus, 0,0084, supposée obtenue dans une Table ajustée, est approchée à moins de 0,001, en plus ou en moins, on l'obtiendra encore par la formule précédente, mais en prenant s quatre fois plus grand, ce qui donne γ deux fois plus grand, soit $\gamma = 2,98$, et ce qui conduit à

$$P = \Theta(\gamma) = 0,9999.$$

La probabilité de cette même approximation est donc ici beaucoup plus grande, et l'on peut dire qu'elle équivaut à une certitude.

Dans le même exemple, si l'on avait demandé la probabilité que le résultat est approché à moins de $\frac{1}{2}$ millième, on aurait trouvé, dans le cas d'une Table non ajustée,

$$P = 0,71,$$

et, dans le cas d'une Table ajustée,

$$P = 0,97.$$

66. On peut, par le même procédé, calculer d'une manière générale quelle est l'approximation probable que l'on obtient pour tous les taux de mortalité dans une Table dressée d'après l'observation d'un certain nombre de têtes. Cette approximation n'est pas la même à tous les âges; elle est d'autant plus grande pour un âge donné qu'il y a plus de vivants ayant cet âge parmi les individus observés, c'est-à-dire qu'elle est plus grande pour les âges jeunes, et qu'elle diminue quand l'âge augmente.

Exemple. — Supposons une Table dressée d'après l'observation de N individus; on demande quelle est la probabilité

que la chance de décès à trente ans est obtenue à moins de 0,001, de 0,005 et de 0,01.

Dans la formule

$$\gamma = l\sqrt{\frac{s^3}{2\alpha\beta}} = l\sqrt{\frac{s}{2pq}}, \tag{24}$$

il faut faire

$$p = 0{,}008, \quad q = 0{,}992,$$

et s égal au nombre des têtes qui ont été observées comme ayant subi, à une époque quelconque, le risque de décès de trente à trente et un ans. Lorsqu'on observe un groupe d'individus au point de vue de la mortalité, il y en a à peu près le quart qui passent par l'âge de trente ans et qui sont par conséquent observés à cet âge; mais, comme, d'un autre côté, l'ajustement de la Table, que nous supposons fait, a pour résultat, comme nous le verrons plus loin, de donner une approximation à peu près aussi grande que si s était quatre fois plus fort qu'il n'est en réalité, on peut appliquer, pour l'âge de trente ans, la formule précédente, en prenant pour s le nombre total de têtes observées pour la confection de la Table, c'est-à-dire N.

On en tire les conclusions suivantes :

NOMBRE TOTAL de têtes observées pour la confection de la Table.	PROBABILITÉ que le taux de mortalité a trente ans est obtenu, après ajustement de la Table, avec une approximation, en plus ou en moins, de			
	0,0001.	0,001.	0,002.	0,003.
10000	0,09	0,74	0,97	0,999
20000	0,10	0,80	0,99	0,999
30000	0,15	0,95	0,999	0,999
40000	0,18	0,97	0,999	0,999
100000	0,27	0,999	0,999	0,999
160000	0,34	0,999	0,999	0,999
1000000	0,74	0,999	0,999	0,999

On trouve, par un calcul analogue, les probabilités d'obtenir telle ou telle approximation pour le taux de mortalité à tout autre âge, à soixante ans par exemple :

NOMBRE TOTAL de têtes observées pour la confection de la Table.	PROBABILITÉ Que le taux de mortalité à soixante ans est obtenu avec une approximation, en plus ou en moins, de			
	0,0001.	0,001.	0,005.	0,01.
10000	0,01	0,15	0,64	0,93
20000	0,02	0,20	0,85	0,99
30000	0,03	0,25	0,90	0,999
40000	0,03	0,29	0,93	0,999
100000	0,05	0,45	0,99	0,999
160000	0,06	0,54	0,999	0,999
1000000	0,15	0,93	0,999	0,999

Dans une recherche de ce genre, on ne peut guère admettre comme ayant une autorité suffisante que les résultats qui ont au moins 95 chances sur 100 pour être exacts. On peut donc conclure des deux tableaux qui précèdent :

1° Qu'aucune Table de mortalité dressée sur des têtes choisies ne donne les taux exacts à 0,0001 près, c'est-à-dire avec quatre décimales exactes ;

2° Que pour obtenir des taux exacts à 0,001 près, c'est-à-dire avec trois décimales exactes, jusque vers l'âge de 30 ans, il faut opérer sur 30 000 têtes au moins; et, jusque vers l'âge de 60 ans, il faut opérer sur 160 000 têtes au moins ;

3° Que pour obtenir, jusque vers l'âge de 60 ans, des taux exacts à un demi-centième près (c'est-à-dire avec deux décimales exactes, en forçant la seconde au besoin), il faut opérer sur 50 000 têtes au moins.

Ces exemples suffisent pour indiquer quel degré de confiance on peut avoir dans les indications des Tables de mortalité. Cette confiance ne peut jamais être absolue, et du reste,

comme nous l'avons dit dans l'introduction, l'absolu n'est pas du domaine du Calcul des probabilités. On ne peut pas, en pratique, déterminer la valeur exacte d'une probabilité, on ne peut que l'évaluer avec plus ou moins de chances de réussite ; et tout ce qu'on peut faire ici, c'est de calculer quelle probabilité il y a qu'on arrive à un degré déterminé d'approximation.

67. Dans le second syllogisme, la mineure et la conclusion dépendent des propositions qui précèdent; la majeure ne suppose qu'une chose, c'est que l'individu que l'on a en vue se trouve dans les mêmes conditions que la moyenne de ceux pour lesquels les observations de mortalité ont été faites. Cette supposition n'est jamais complétement exacte, et elle entraîne une nouvelle erreur qui est généralement bien plus grande encore que celle qui résulte de la confection même de la Table.

Ceci prouve que ce serait travailler dans le vide que de chercher à établir une Table de mortalité avec une trop grande approximation, puisqu'on ne pourra s'en servir qu'en faisant une nouvelle hypothèse, peu approchée elle-même de la réalité. Il est vrai que les erreurs commises par l'admission de cette nouvelle hypothèse tendront à se contre-balancer, lorsqu'on l'appliquera à un grand nombre de personnes.

Ainsi, théoriquement, une Table de mortalité, dressée par âges, aura d'autant plus de valeur qu'elle s'appliquera à un plus grand nombre de têtes et à une couche de population plus homogène; pratiquement, c'est surtout la seconde qualité qui prédominera. Si ces deux conditions sont remplies, la Table donnera avec une approximation raisonnable la probabilité de décès, pendant une année à venir, de tout individu vivant à peu près dans des conditions analogues à celles où vivait la couche homogène de population pour laquelle la Table a été dressée.

On ne devra donc appliquer les résultats fournis par une Table qu'aux individus placés dans de telles conditions. Tout

en ayant cette précaution, on commettra certainement encore une erreur importante si l'on applique ces résultats à un individu isolé ; mais ces erreurs se balanceront probablement, dans leur résultat final, si l'on applique les mêmes résultats à un très-grand nombre d'individus. Elles se balanceront d'autant mieux qu'on aura été plus rigoureux pour n'admettre que les individus placés dans les mêmes conditions moyennes que la couche homogène de population qui a servi de base à la confection de la Table.

C'est par ces considérations qu'on se trouve amené à dresser des Tables de mortalité par âges, en admettant que tous les gens du même âge que l'on fait entrer dans l'observation ont les mêmes chances de mortalité.

68. On appelle, à proprement parler, *Table de mortalite* une Table qui indique quelle est, à chaque âge, la probabilité de décès pendant le cours de l'année qui commence. Au moyen de cette Table, il est facile d'en établir une autre, qui s'appelle *Table de survie*, et qui indique, sur un nombre rond de naissances, ou d'individus âgés de 0 an, 1000 ou 100 000, combien il restera de survivants à chaque âge.

La Table de mortalité proprement dite est à peu près la seule qui soit utile quand on veut faire des calculs exacts. Dans le langage ordinaire de la conversation, on appelle souvent *Table de mortalité* la seconde Table, qui n'est réellement qu'une Table de survie ; et, si l'on a besoin d'évaluer un taux de mortalité à un certain âge, on le déduit facilement des deux chiffres qui indiquent le nombre des vivants à cet âge et à l'âge suivant.

La confection d'une Table de mortalité n'est qu'une recherche statistique, où le calcul et les conceptions théoriques n'ont rien à voir, car les lois de la mortalité humaine ne se calculent pas, et ne peuvent qu'être constatées par l'observation, ainsi qu'il arrive pour l'étude de tous les phénomènes naturels. Le seul mérite qu'on puisse apporter dans cette recherche statistique, c'est de bien observer les faits et d'en-

registrer tous les résultats avec ordre et méthode. Ce n'est qu'après avoir dressé les Tables originales qu'on pourra s'occuper d'en tirer des conclusions et d'en faire des applications, au moyen du calcul.

69. On peut dresser des Tables de mortalité soit pour des têtes choisies, soit pour un ensemble de population. Pour opérer sur des têtes choisies, il faut avoir à sa disposition les dates de naissance et de décès d'un grand nombre d'individus, appartenant à une couche homogène de population. Ces Tables sont les plus exactes, parce qu'on n'y fait entrer que le résultat de faits authentiquement constatés. On suit chacun des membres du groupe que l'on a choisi depuis sa naissance jusqu'à son décès; on sait donc exactement, pour chaque année d'âge, combien de têtes ont été soumises au risque de décès, et combien il s'est produit de décès, ce qui donne, par division, la probabilité annuelle de décès, supposée égale pour tous, laquelle prend le nom de *taux de mortalité*.

Si, au contraire, on opère sur un ensemble de population, on est forcé d'entrer dans le champ des hypothèses, puisqu'on ne suit pas les mêmes individus depuis leur naissance jusqu'à leur décès. Les décès que l'on enregistre ne sont plus les décès des gens dont on a noté les naissances, de sorte qu'on est obligé de tenir compte, dans une certaine mesure, de l'émigration des individus ayant fait partie du groupe observé, de l'arrivée de nouveaux individus dans le même groupe, de l'augmentation du nombre de têtes qui s'y produit par l'excès naturel des naissances sur les décès, et l'on emploie diverses méthodes pour échapper aux causes d'erreur que ces nouveaux éléments peuvent faire naître; nous exposerons ces diverses méthodes dans le chapitre VI, mais nous allons d'abord indiquer comment on dresse les Tables de mortalité sur des têtes choisies.

70. Il est bon de remarquer que les taux de mortalité que l'on obtient pour des têtes choisies ne sont pas exactement

les taux correspondant à l'époque actuelle. On suit, pendant une période continue de leur existence, un groupe d'individus dont un certain nombre sont nés il y a 100 ans, d'autres il y a 99 ans, etc.; les décès entre les âges de 0 et de 1 an se sont donc produits, les uns il y a 100 ans, les autres il y a 99 ans, etc., et les autres la dernière année considérée. Le taux obtenu pour la mortalité de 0 à 1 an est donc une sorte de moyenne entre ceux qui étaient vrais pour cet âge, il y a 100 ans, 99 ans, etc... et 1 an. De même, le taux obtenu de 1 à 2 ans est une moyenne entre les taux qui étaient vrais pour cet âge, il y a 99 ans, 98 ans, etc., et 1 an ; de même pour les taux à un âge quelconque. Or les taux de mortalité aux mêmes âges ne sont pas immuables dans un même pays: ils changent avec le temps. En enregistrant de cette manière les taux de mortalité des têtes choisies, on commettra donc forcément des erreurs, qui tiennent à ce que la loi de mortalité du groupe que l'on considère n'est pas restée invariable pendant un temps aussi long.

Au contraire, lorsqu'on opère sur des ensembles de population, on obtient souvent (sauf les erreurs inhérentes à l'emploi de telle ou telle méthode) les taux de mortalité à chaque âge, avec leur valeur contemporaine ou actuelle. Ce qui est alors inexact ou fictif, c'est la Table de survie, ou la Table de mortalité sous sa forme vulgairement connue, Table qui ne donne que des nombres de survivants par âges. En effet, quand on a obtenu des taux de mortalité, aujourd'hui exacts, pour chaque âge, et qu'on en déduit une Table indiquant le nombre de survivants, on fait forcément cette hypothèse, que le taux de mortalité à 0 an était le même, il y a 100 ans, qu'aujourd'hui ; que le taux à 1 an était le même il y a 99 ans qu'aujourd'hui, etc. La Table de mortalité et la Table de survie, qui donnent, l'une les taux de mortalité, et l'autre les nombres de survivants, si elles sont déduites des mêmes observations, ne peuvent pas être exactes toutes les deux, ou du moins cela suppose que la loi de mortalité serait restée invariable depuis un siècle, dans le groupe considéré. Il est utile de ne pas oublier

cette distinction, à laquelle on aura égard dans la mesure du possible, suivant les applications que l'on aura à faire de l'une ou de l'autre Table. En règle générale, si l'on a opéré sur des têtes choisies, c'est la Table de survie qui est exempte de l'erreur provenant de la variation des lois de la mortalité ; si l'on a opéré sur un ensemble de population, c'est au contraire la Table des taux de mortalité qui jouit souvent de cet avantage.

CHAPITRE V.

TABLES DE MORTALITÉ SUR DES TÊTES CHOISIES.

§ I. — *Généralités.*

71. Pour dresser une Table de mortalité sur des têtes choisies, il faut avoir à sa disposition les dates de naissance et les dates de décès d'un grand nombre d'individus, appartenant à une couche homogène de population; mais ces renseignements n'ont été recueillis que pour de très-rares catégories d'individus.

Les enfants, dont les dates de naissance sont inscrites sur les registres de l'État civil, se dispersent pendant leur vie, et, bien que les dates de leurs décès soient également indiquées sur d'autres registres, il est impossible de recueillir et de rassembler ces documents, épars dans tout un pays, et même dans le monde entier. Quelquefois cependant ces documents peuvent se trouver tout rassemblés; cela arrive quand les gens auxquels ils s'appliquent ont fait partie d'une même corporation religieuse, administrative ou financière, qui avait intérêt à en tenir note. Ainsi les registres des monastères et des établissements religieux ont été utilisés par Deparcieux, en 1742; et l'on pourrait également aujourd'hui établir une Table de mortalité spéciale d'une certaine valeur, en compulsant les registres des autorités ecclésiastiques; car ces registres doivent indiquer, depuis un temps assez long, les décès par âges de tous les membres du clergé, qui forment une couche de population bien homogène.

Quant aux administrations publiques, leurs employés forment encore une classe trop mobile pour qu'on puisse les suivre jusqu'à leur décès. L'administration de la Légion d'honneur,

qui note les naissances et les décès de tous ses membres, pourrait fournir des documents assez nombreux ; mais ils s'appliqueraient à une classe de population très-peu homogène, comprenant un grand nombre de militaires, exposés à des dangers spéciaux. Il est vrai que le travail pourrait être divisé en deux, ce qui donnerait deux Tables de mortalité, celle des membres civils et celle des membres militaires de la Légion d'honneur. Ce serait une étude intéressante à faire.

72. On trouve des documents plus complets pour les individus qui sont réunis entre eux par des liens financiers : ces documents se rencontreront dans la comptabilité des associations qui ont à recevoir ou à payer des sommes proportionnées aux âges, soit du vivant, soit au décès de leurs membres. Ces associations ne sont autres que celles qui pratiquent des assurances sur la vie, sous une forme quelconque, c'est-à-dire les Sociétés de secours mutuels, les Caisses de retraites, les tontines et les Compagnies d'assurances sur la vie.

Les Sociétés de secours mutuels pourraient fournir des documents importants, qui seraient surtout précieux en ce qu'ils s'appliqueraient à des couches de population bien homogènes. Prises dans leur ensemble, elles donneraient la mortalité de la classe ouvrière ; séparées en divers groupes, elles pourraient faire connaître la mortalité des ouvriers suivant leurs professions, forgerons, peintres, charpentiers, mineurs, filateurs, etc. Là encore, il y a un travail intéressant à entreprendre.

Les Caisses de retraites de l'État pourraient donner les éléments d'un travail analogue pour la classe des retraités.

Enfin, de toutes les associations, les tontines et les Compagnies d'assurances sont celles qui connaissent le mieux les dates des naissances et des décès de leurs membres : aussi leurs registres ont-ils été utilisés de tout temps pour dresser des Tables de mortalité. Deparcieux s'est servi des documents fournis par les établissements tontiniers pour dresser la Table de mortalité qui porte son nom ; M. Beauvisage a utilisé ceux

de la tontine Lafarge pour en établir une autre ; les principales Compagnies d'assurances anglaises ont établi également, au moyen de leurs registres, deux Tables de mortalité importantes; enfin M. de Kertanguy a dressé tout récemment, au moyen des registres de la Compagnie française d'Assurances générales, la Table de mortalité des assurés de cette Compagnie. Nous allons donner quelques détails concernant ces divers travaux.

§ II. — *Tables de mortalité de Deparcieux.*

73. Deparcieux a fait entrer dans son travail, qu'il a publié en 1746, des relevés statistiques faits jusqu'au commencement de 1742. Il a puisé ses renseignements à deux sources distinctes, d'une part dans trois tontines fondées en 1689, 1696 et 1734, de l'autre dans les registres mortuaires d'un certain nombre d'établissements religieux. Il a ainsi dressé deux Tables de mortalité distinctes, car il n'a pas voulu mêler le tout ensemble, ce qui l'aurait forcé d'admettre d'avance que la mortalité était la même chez les religieux que chez les gens du monde; et en effet, comparaison faite des deux Tables de mortalité qu'il a obtenues, on constate certaines différences, que Deparcieux lui-même a fait ressortir, et que nous indiquerons plus loin.

74. *Première Table de Deparcieux. — Associés tontiniers.* — La tontine fondée en novembre 1689 comptait 5911 associés de tout âge, depuis la naissance jusqu'à 70 ans; elle était divisée en quatorze classes, comprenant : la première les associés âgés de plus de 5 ans, la deuxième les associés âgés de plus de 5 et de moins de 10 ans, etc. Chacun d'eux recevait, des capitaux qu'il avait versés, un intérêt viager dont le taux était calculé chaque année suivant le numéro de la classe et suivant le nombre des survivants. L'administration de la tontine se trouvait donc régulièrement informée des décès par classes; mais elle ne connaissait les âges des associés à leur

décès, ainsi que leurs âges à l'entrée dans l'association, que par unités de temps comprenant cinq années. Deparcieux fut donc forcé, pour rétablir les âges à l'entrée, de faire une hypothèse. Il trouvait, par exemple, dans la deuxième classe 190 rentiers, tous âgés de plus de 5 et de moins de 10 ans ; il aurait pu supposer qu'ils se répartissaient également par âges, et qu'il y en avait 38 de 6 ans, 38 de 7 ans, 38 de 8 ans, etc. Il préféra ne pas scinder la période de 5 ans, et admettre que les 190 rentiers avaient le même âge, qui ne pouvait être qu'un âge moyen entre 5 et 10 ans. Toutefois il ne prit pas la moyenne exacte, $7\frac{1}{2}$ ans, mais bien 7 ans, parce qu'il pensa que dans chaque classe la plupart des rentiers devaient avoir moins que la moyenne des âges. En effet, les personnes dont l'âge se rapprochait de la limite inférieure d'une classe quelconque avaient un avantage relatif à entrer dans la tontine, tandis que ceux qui se rapprochaient de la limite supérieure, ayant un désavantage, devaient s'abstenir, ou attendre l'ouverture ultérieure d'une tontine nouvelle.

Ainsi Deparcieux admit, pour tous les rentiers de la deuxième classe, l'âge de 7 ans, au 1er janvier 1790, pour ceux de la troisième l'âge de 12 ans, et ainsi de suite pour toutes les autres. Il fit exception seulement pour la première classe, comprenant les enfants de moins de 5 ans ; il pensa qu'à cause des dangers spéciaux que présente, à la connaissance de tout le monde, la première enfance, on avait dû faire inscrire peu d'enfants de 1 ou 2 ans, et beaucoup de 4 ans ou $4\frac{1}{2}$ ans : aussi prit-il l'âge de 3 ans au lieu de celui de $2\frac{1}{2}$, pour l'âge commun de tous les rentiers de cette première classe.

Ayant ainsi fixé les âges à l'entrée, les décès arrivés chaque année dans chaque classe lui donnèrent les décès par âges, mais seulement par périodes quinquennales. Ainsi, pour connaître la mortalité de 32 à 37 ans, il faut passer en revue les sept premières classes, qui seules ont pu fournir des associés arrivant à l'âge de 32 ans, à différentes époques. La troisième classe, par exemple, comptait 297 associés, entrant à des âges compris entre 10 et 15 ans, et que l'on suppose entrant

tous à 12 ans. Les décès pendant les 20 premières années ont été, dans cette classe, de 43, ce qui réduit à 254 le nombre des personnes arrivant à l'âge de 32 ans, et sur ces 254 personnes il n'en restait, 5 ans après, que 243. Faisant le même décompte pour les sept premières classes, on dresse le tableau suivant :

CLASSE d'où proviennent les rentiers.	NOMBRE DE RENTIERS	
	VIVANTS à l'âge de 32 ans.	SURVIVANTS à l'âge de 37 ans.
1re classe....	148	136
2e »	229	220
3e »	254	243
4e »	246	234
5e »	233	227
6e »	296	286
7e »	603	570
TOTAL...	2009	1916

Sur 2009 rentiers vivants à l'âge de 32 ans, il y a donc eu 93 décès de 32 à 37 ans, ce qui donne le taux de mortalité pour cette période quinquennale. Toutefois, avant de calculer ce taux, Deparcieux a ajouté aux nombres ci-dessus les nombres analogues provenant de la tontine de 1696.

75. Cette tontine comprenait 3409 associés : elle était composée de quinze classes, procédant, comme celles de 1689, par périodes quinquennales. Elle a fourni 1103 rentiers vivants à l'âge de 32 ans, réduits à 1031 vivants à l'âge de 37 ans, ce qui, pour les deux tontines réunies, donne 165 décès sur 3112 vivants, de 32 à 37 ans, et conduit au taux de mortalité de $\frac{165}{3112}$ ou 0,053 pour cette période.

76. Deparcieux dit dans son ouvrage qu'il « s'est servi

aussi des rapports » (c'est-à-dire des taux de mortalité) « venant de la tontine de 1734 » ; mais il ne donne pas les chiffres originaux de celle-ci, tandis qu'il donne tous les chiffres originaux des tontines de 1689 et de 1696, qui lui ont servi de matériaux. Cette tontine de 1734 n'a dû lui donner d'ailleurs que très-peu de décès et de documents, puisqu'il terminait ses travaux au commencement de 1742. Il est donc permis de supposer qu'il ne s'est guère servi que des documents des deux premières, mais qu'il a été forcé de faire subir aux résultats bruts qu'il obtenait par les divisions une correction plus ou moins systématique, ce que l'on appellerait aujourd'hui un *ajustement*, opération parfaitement justifiable, si elle est bien conçue, et dont nous ferons ressortir plus loin la nécessité. Mais, ne se souciant pas de faire connaître la méthode qu'il avait employée pour cette correction, il a laissé inconnus les documents originaux de la tontine de 1734, afin que l'on pût attribuer à l'influence de ces documents les divergences que l'on pourrait constater entre les chiffres qui lui ont servi de base et les résultats de ses calculs.

77. Ayant obtenu les taux de mortalité par périodes de 5 ans, Deparcieux a pu dresser une Table indiquant le nombre des rentiers vivants aux âges successifs de 3 ans, 7, 12, 17,...; puis, dans chaque période quinquennale, il a déterminé les vivants par années d'âge au moyen d'interpolations.

Il a dressé ainsi la Table de mortalité qui porte son nom. Elle ne commence qu'à l'âge de 3 ans, ce qui tient à la manière même dont elle a été construite. Elle est dressée sur les observations des 9320 rentiers faisant partie des tontines de 1689 et 1696, plus un certain nombre faisant partie de la tontine de 1734 : on peut donc admettre qu'elle se rapporte à l'observation de 10000 têtes environ. Deparcieux l'a ramenée au nombre rond de 1000 vivants à l'âge de 3 ans, et l'a publiée ainsi dans son *Essai sur les probabilités de la vie humaine* (Paris, 1746). C'est la Table qui est généralement

connue sous le nom de *Table de Deparcieux*, et nous la reproduisons dans le Tableau comparatif donné au n° 113.

78. Voici comment on peut se rendre compte du degré d'approximation probable que présente la Table de Deparcieux. A 30 ans, Deparcieux a trouvé 0,989 pour la probabilité de survie au bout de 1 an ; mais, comme il n'a opéré que sur 10 000 têtes, les tableaux du n° 66 démontrent qu'on ne peut considérer ce nombre comme exact qu'à 0,01 près ; autrement dit, les recherches de Deparcieux prouvent seulement que la véritable probabilité de survie est comprise entre 0,979 et 0,999 : sur 734 vivants à 30 ans, le nombre des survivants à 31 ans sera donc compris entre 719 et 733. Dans le nombre de 726 donné par la Table, on ne peut donc compter avec quelque certitude que sur les deux premiers chiffres. Ainsi le dernier chiffre de tous les nombres de la Table de Deparcieux est complétement illusoire ; on doit considérer cette Table comme ne s'appliquant qu'à 100 individus vivants à l'âge de 3 ans, et, dans le nombre des survivants à un âge quelconque, on ne doit admettre que deux chiffres quand il y en a trois, et un quand il y en a deux.

79. *Seconde Table de Deparcieux. — Religieux de divers ordres.* — Deparcieux a dressé une autre Table de mortalité, qui concerne les religieux et les religieuses de divers couvents de Paris : 14 couvents d'hommes et 26 couvents de femmes lui ont donné 8700 hommes et 1519 femmes, ayant fait leur profession entre 16 et 25 ans, et dont les âges au décès ont été relevés. « D'autres couvents, ajoute Deparcieux, n'ont pas voulu me donner ces renseignements; j'ai eu beau leur expliquer l'usage que j'en voulais faire, il s'est trouvé des supérieures..... auxquelles il m'a été impossible de faire entendre raison. »

Néanmoins cette seconde Table de mortalité est encore intéressante, puisqu'elle repose sur 10 219 têtes, appartenant à une couche de population bien homogène. Nous ne croyons

pas utile de la rapporter ici : elle s'écarte peu de la précédente, qui est généralement seule connue sous le nom de *Table de Deparcieux;* voici les principales particularités que l'auteur en a fait ressortir.

Les religieuses vivent plus que les religieux. Les religieux meurent moins que les gens du monde au commencement de leur entrée en religion; mais, quand ils atteignent l'âge de 40 à 50 ans, ils meurent beaucoup plus vite. En voici les raisons. Les religieux sont des têtes choisies, on ne les admettrait pas dans leurs couvents s'ils avaient des infirmités ; de plus, ils mènent une vie tranquille : il est donc naturel que leur mortalité soit faible dans les premières années; mais, au bout de 15 ou 20 ans, leur santé s'est altérée par le jeûne et par la privation du bien-être nécessaire à l'âge mûr : la mortalité augmente. Aussi Deparcieux conclut-il que, choisis comme ils le sont, les individus qui entrent en religion vivraient plus longtemps encore s'ils embrassaient une autre carrière.

§ III. — *Table de mortalité de Duvillard.*

80. La Table de mortalité qui est, aujourd'hui encore, le plus employée en France, est celle de Duvillard. Dans son ouvrage publié en 1806, sous le titre d'*Analyse de l'influence de la petite vérole sur la mortalité*, ce savant s'occupe presque exclusivement de l'influence de cette maladie et de la grande utilité de la vaccine, qui préoccupait alors tous les esprits. Il se lance à ce sujet dans des calculs inextricables ; cependant, comme il a besoin, pour ses déductions, de donner comme point de comparaison la loi naturelle des décès en France, il fournit plusieurs relevés de statistiques mortuaires, faits à diverses époques à Berlin, à Genève, etc. ; puis il présente pour la France une Table de mortalité qui, depuis, a gardé son nom; mais il n'indique pas de quelle manière il a recueilli et coordonné les éléments qui ont servi à la calculer. Voici, à ce sujet, tout ce qu'on trouve dans son ouvrage :

« Cette Table, dit Duvillard, que j'ai présentée à l'Institut, en l'an V, est le résultat d'un assez grand nombre d'observations faites en divers lieux de la France avant la Révolution. Elle est fondée sur un nombre de 101 542 décès aux différents âges, et provient d'une population de 2 920 672 individus. A l'époque où les faits ont été recueillis.... le mouvement de la population avait toute l'uniformité qu'on peut attendre de tant de causes, etc. Cette Table doit représenter assez exactement la loi de mortalité. »

Soit que cette Table fût inexacte alors même qu'elle a été dressée, soit seulement que depuis 80 ans la loi de mortalité en France ait beaucoup changé, ce qui est d'ailleurs bien constaté, il est certain qu'aujourd'hui la Table de Duvillard accuse une mortalité beaucoup trop rapide dans la jeunesse et dans l'âge mûr, et beaucoup trop lente dans la vieillesse, par rapport à la mortalité générale actuelle de la France.

Nous reproduisons, dans le tableau du n° 113, la Table de Duvillard, ramenée au nombre rond de 1 million de naissances, et telle qu'elle est donnée par lui-même dans son ouvrage.

§ IV. — *Table de mortalité de Beauvisage.*

81. La tontine Lafarge a été fondée en 1792 : elle comprenait environ 116000 individus de tout âge, dont les uns venaient de naître, tandis que d'autres étaient octogénaires. Si l'on avait pu recueillir la date des décès de tous les tontiniers décédés, comme on connaissait leurs âges exactement, ou au moins par années, on aurait pu dresser une Table de mortalité extrêmement intéressante. Malheureusement, sur 116000 individus, ayant dû donner 110000 extinctions probables, M. Beauvisage n'a pu constater d'une manière certaine, jusqu'à la fin de 1864, époque à laquelle il a arrêté ses calculs, que 38 951 décès, soit un peu plus d'un tiers. Rien ne prouve, il est vrai, que les individus dont l'âge au décès a pu être régulièrement constaté aient appartenu à une classe particulière

de déposants, soit au point de vue de l'âge à l'époque du versement ou du décès, soit comme position sociale. Cependant il y a un choix, un triage fait sur les 116 000 associés originaires, et, comme les causes déterminantes de ce triage ne sont pas connues, cela enlève à la Table qui en résulte une grande partie de sa valeur.

82. Voici comment M. Beauvisage a disposé ses relevés :

AGES.	DÉCÈS par âges.	VIVANTS en 1793.	SUR-VIVANTS.	SOUMIS au risque.	TAUX DE MORTALITÉ bruts.	TAUX DE MORTALITÉ par les moyennes.
1	5	348	»	»	0,014367	»
2	9	426	343	769	0,011703	0,0128793
3	16	513	760	1273	0,012568	0,0099166
.	..	...	...	....	....	....
Totaux.	38951	38951				

La première colonne du tableau ci-dessus indique les âges; la deuxième indique les décès par âges; la troisième le nombre d'individus qui avaient atteint chacun des âges en 1793. Sur 348 enfants âgés de 1 an, il en est mort 5 à cet âge : il en est donc resté, de ce premier groupe, 343 (quatrième colonne) ayant atteint l'âge de 2 ans. Si l'on y ajoute les 426 qui avaient 2 ans en 1793, on aura un total de 769 (cinquième colonne), ayant subi, *bien qu'à diverses époques*, le risque de décès à l'âge de 2 ans. Le taux de mortalité qui, à 1 an, était $\frac{5}{348}$ ou 0,014367 (sixième colonne), est donc, à 2 ans, $\frac{9}{769}$ ou 0,011703. On calcule ainsi les taux de mortalité à tous les âges, lesquels forment la sixième colonne.

83. Mais ces taux présentent de grandes irrégularités : ainsi, pour ne citer qu'un exemple, on trouve 0,006354 à 5 ans, 0,003449 à 6 ans, et 0,005379 à 7 ans, anomalies qui ne

peuvent pas exister dans la nature. Pour les faire disparaître, M. Beauvisage a établi de proche en proche, pour toute la durée de la vie, la moyenne des taux de mortalité à trois âges consécutifs, et il adopte cette moyenne comme taux de mortalité réel pour l'âge du milieu : ainsi le taux cherché pour l'âge de 6 ans (c'est-à-dire de l'âge de 6 ans à celui de 7 ans) sera la moyenne des trois coefficients rapportés plus haut, c'est-à-dire 0,0050606. Par cette correction, il cherche à remédier encore à une autre cause d'erreur qui tient à ce que les âges au décès ont été calculés par années, et en prenant simplement la différence entre le millésime de l'année de la naissance et celui de l'année du décès : d'où il résulte que certains individus ont dû être comptés comme contemporains, bien qu'il y eût entre leurs âges une différence de deux ans moins quelques jours.

Il résulte des diverses causes d'imperfection qui précèdent que la Table de mortalité de M. Beauvisage ne présente pas une grande autorité. A cause des grandes variations que présente la mortalité pendant les premières années de l'enfance, M. Beauvisage n'a publié sa Table qu'à partir de 3 ans; il l'a ramenée au nombre rond de 1000 vivants à l'âge de 3 ans. Nous la reproduisons dans le tableau du n° 113.

§ V. — *Table de mortalité des vingt Compagnies anglaises.*

84. Les dix-sept principales Compagnies d'assurances anglaises avaient déjà dressé, en 1843, la Table de mortalité de leurs assurés; en 1862, l'Institut des Actuaires de Londres, afin d'utiliser les nombreux documents recueillis depuis lors, prit l'initiative de la confection d'une nouvelle Table, et adopta à cet effet un plan d'ensemble, de concert avec les vingt principales Compagnies d'assurances.

Les documents furent recueillis au moyen de cartes imprimées, semblables au modèle ci-après; une carte fut consacrée

à chaque assuré, aussi bien pour les polices en cours que pour les polices résiliées ou sinistrées.

POLICE N°

Noms.

Nationalité.

Bien ou mal portant.

Année d'entrée...........

Année de sortie.. ....

Age à l'entrée............

Age à la sortie...........

Mode de sortie...........

Cause du décès :

Chaque Compagnie remplit les cartes qui lui furent envoyées, en indiquant :

1° Le numéro de la police : quand un même assuré avait plusieurs polices, on ne tenait compte que de la plus ancienne ; si cependant une première police avait été résiliée, et que le même assuré en eût souscrit ensuite une nouvelle, celle-ci figurait sur une carte spéciale et comptait comme les autres ;

2° Les noms et prénoms de l'assuré ;

3° La nationalité ;

4° L'état de bonne ou de mauvaise santé au moment de la signature de la police (en Angleterre, on n'exclut pas de l'assurance les gens que l'examen médical fait reconnaître comme étant mal portants; on leur fait seulement payer une prime plus élevée, et on les considère comme des risques exceptionnels) ;

5° L'année d'entrée ;

6° L'année de sortie ;

7° L'âge à l'entrée, pour lequel on adopta l'âge au prochain anniversaire de l'assuré : la date de naissance ne put pas toujours être indiquée, car autrefois les polices ne mentionnaient pas cette date : elles comptaient comme âge de l'assuré l'âge à son prochain anniversaire ;

8° L'âge à la sortie : cet âge fut uniformément calculé en ajoutant à l'âge à l'entrée la différence entre les millésimes des années d'entrée et de sortie ;

9° Le mode de sortie : un D indique que la sortie a eu lieu par décès, un R indique que la police a été résiliée, un trait — indique qu'elle était encore en cours le jour où les observations ont été closes, c'est-à-dire le 31 décembre 1863 ;

10° La cause du décès : cette indication n'a été ajoutée qu'en vue de recherches ultérieures concernant une statistique médicale.

85. Les cartes, une fois remplies, furent adressées à l'Institut des Actuaires, qui commença son travail.

On les divisa d'abord en quatre groupes, comprenant :

Le premier, les hommes en bonne santé ;

Le deuxième, les femmes en bonne santé ;

Le troisième, les hommes et les femmes en mauvaise santé au moment de la signature de la police ;

Le quatrième, les assurés exposés à des risques exceptionnels en raison du climat ou d'une profession dangereuse, et, comme tels, payant une surprime.

Chaque groupe fut traité à part. Dans chacun d'eux, on classa les cartes par ordre alphabétique, afin de réunir ensemble les cartes se rapportant à un même assuré. Pour les nobles, qui souvent portent successivement plusieurs titres différents pendant le cours de leur existence, on dut recourir au nom de famille originaire, au moyen de l'*Annuaire nobiliaire*. On n'eut plus alors que des cartes se rapportant à des individus différents.

Dans chaque groupe, le classement par ordre alphabétique fut détruit, et les cartes furent classées en trois catégories,

suivant le mode de sortie, de sorte qu'on réunit ensemble toutes les polices terminées pour cause de décès, toutes les polices résiliées et toutes les polices encore en cours. Dans chacune de ces catégories, il fut fait un nouveau classement, d'après les âges à l'entrée, en mettant ensemble toutes les cartes dont l'âge à l'entrée était le même ; et enfin, dans chacun de ces groupes par âges d'entrée, les cartes furent réunies par âges de sortie et comptées.

Toutes ces opérations n'offrent aucune difficulté ; elles permirent de dresser, pour chacun des âges d'entrée, des tableaux analogues à celui dont nous donnons un extrait, et qui se rapporte au groupe des hommes bien portants entrés à l'âge de 30 ans.

Table d'observations.

AGE A LA SORTIE.	HOMMES BIEN PORTANTS. AGE D'ENTRÉE, 30 ANS. — ENTRÉE, 5791		
	EXISTANT au 31 déc. 1863.	RÉSILIATIONS.	DÉCÈS.
30	319	75	4
31	252	365	28
32	230	220	35
33	235	153	49
34	198	147	51
....	...	...	..
Totaux jusqu'au 31 décembre 1863.	3677	1491	623
Total égal au nombre des entrants.	5791		

Ces tableaux furent appelés *Tables d'observations ;* ils renferment tous les documents originaux, et notamment le nombre de têtes exposées au risque et le nombre de décès pour chaque année d'assurance et pour chaque âge d'entrée ; ils permettent donc d'étudier la loi de mortalité pour toutes

les combinaisons d'âges et de périodes d'assurance. Ils ont été publiés intégralement et sans correction.

86. Pour les assurés entrés à l'âge de 30 ans, le nombre de têtes exposées est de 5791
moins les résiliations. 75
Soit 5716

que l'on peut supposer entrés en moyenne au milieu de leur 30e année d'âge, c'est-à-dire à l'âge de 29 $\frac{1}{2}$ ans, et au milieu de l'année d'assurance : ils n'ont donc été exposés au risque que pendant 6 mois. Si l'on représente le risque annuel à l'âge de 29 ans par α et à l'âge de 30 ans par $\alpha + \delta$, le risque couru est égal à $\frac{1}{2}(\alpha + \frac{1}{4}\delta)$, c'est-à-dire qu'il est le même que celui d'un nombre de têtes deux fois moins grand, 2858, entrant à l'âge de 29 $\frac{1}{4}$ ans, et restant exposées pendant un an.

Le taux de mortalité qui en résulte, $\frac{4}{2858}$, est donc le taux annuel se rapportant à l'âge de 29 $\frac{1}{4}$ ans; il a été cependant considéré comme se rapportant à l'âge de 29 ans : cette approximation simplifie les calculs, et elle ne change guère les résultats définitifs.

Pour la 2e année d'assurance, le nombre de têtes exposées est égal au nombre d'entrants 5791

moins les existants au 31 décembre	319	
moins les résiliations de la 1re année.	75	
moins le décès de la 1re année	4	
	398	398
C'est-à-dire le nombre de ceux qui sont entrés en 2e année. . . , ...		5.393
moins la moitié des résiliations de cette 2e année .		182,5
Soit		5210,5

Ces assurés étaient entrés en moyenne à 29 $\frac{1}{2}$ ans, et au milieu de l'année ; ils avaient donc bien en moyenne l'âge de 30 ans au commencement de cette année d'observation. Ainsi le taux de mortalité $\frac{28}{5210,5}$, que l'on obtient en comparant les décès de cette 2e année au nombre de têtes exposées,

correspondra exactement à l'âge de 30 ans, et de même pour les suivants.

Pour la 3e année, il faut retrancher du nombre de têtes

entrées en 2e année		5393
les existants au 31 décembre	252	
les résiliations de la 2e année	365	
les décès de la 2e année.	28	
	645	645
et l'on obtient le nombre des entrants en 3e année . .		4748
Retranchant encore la moitié des résiliations de cette 3e année		110
Il reste		4638

pour le nombre de têtes exposées au risque; soit $\frac{35}{4638}$ pour le taux de mortalité, qui se rapporte à l'âge de 31 ans et à la 3e année d'assurance. Aussi il faut toujours diminuer de 1 an l'âge d'entrée qui se trouve inscrit dans la Table d'observations, parce que cette Table indique l'âge inscrit sur les polices, qui se compte par années courantes et non par années révolues.

87. Si l'on effectue tous les calculs indiqués ci-dessus, on voit que l'on peut obtenir un très-grand nombre de Tables de mortalité. Celle que nous avons commencée à titre d'exemple ne se rapporte qu'aux assurés entrés à 30 ans dans l'assurance, et elle les suit dans tout le cours de leur existence; on peut en dresser d'autres pour les assurés entrés à 31 ans, à 35 ans, à 40 ans et à tout autre âge, et l'on en obtient ainsi une première série. On peut encore ne tenir compte, dans chacune d'elles, que du taux de mortalité pendant la première année d'assurance, mais en faisant varier l'âge d'entrée; on obtient ainsi une nouvelle Table de mortalité. Il y en a même une série d'autres semblables à cette dernière, puisqu'on peut faire le même travail pour la 2e année d'assurance considérée seule, puis pour la 3e année d'assurance, et ainsi de suite. Enfin on peut ne pas tenir compte de la durée de l'assu-

rance en cours, et, réunissant tous les chiffres précédents, dresser une Table de mortalité générale, dans la forme ordinaire, donnant simplement les taux de mortalité par âges.

88. Pour dresser cette Table de mortalité générale, il suffit de réunir les chiffres obtenus dans les divers tableaux partiels dont nous avons donné un exemple. Ainsi, si l'on cherche le taux de mortalité à 30 ans, l'exemple donné plus haut nous donne déjà 28 décès pour 5210,5 têtes exposées au risque. Chacun des tableaux dressés pour les différents âges d'entrée donnera deux chiffres analogues ; et, en les ajoutant, on trouvera 224 décès de 30 à 31 ans pour 27112,5 têtes exposées au risque, ce qui donne $\frac{224}{27112,5}$ ou 0,00826 pour le taux de mortalité des hommes bien portants, à l'âge de 30 ans.

89. Indépendamment des documents originaux qui ont servi de base à ses calculs, la Société des Actuaires anglais a publié les Tables de mortalité suivantes :

Tables de mortalité par périodes quinquennales d'âges (c'est-à-dire en réunissant les âges de 0 à 5 ans, de 5 à 10 ans, etc.) pour chacune des 10 premières années d'assurance isolément et pour toutes les années suivantes en bloc ;

Même travail pour les hommes bien portants (au moment de la souscription de la police), pour les femmes bien portantes, pour les hommes et les femmes bien portants réunis, et pour les individus mal portants des deux sexes réunis ;

Taux et Tables de mortalité par âges, sans tenir compte de la durée de l'assurance ;

Même travail pour les hommes bien portants, pour les femmes bien portantes, pour les individus bien portants des deux sexes, et pour les individus mal portants des deux sexes ;

Tables de la vie moyenne, pour les quatre catégories d'individus qui précèdent.

Toutes ces Tables ne commencent qu'à l'âge de 10 ans, parce qu'au-dessous de cet âge les observations ont porté sur un trop petit nombre de têtes.

La Table la plus importante est celle qui donne, sans distinction de périodes d'assurance, les taux de mortalité des hommes bien portants au moment où ils ont signé leur police : on peut la considérer comme le meilleur étalon connu jusqu'à ce jour, pour la longévité probable des hommes assurés. C'est celle qui est désignée, dans l'ouvrage anglais, par les lettres H^M (*Healthy lives, male*). Nous reproduisons à la fin du volume cette Table de survie, partant d'un nombre rond de 10 000 vivants à 10 ans, ainsi que la Table des taux de mortalité correspondants.

Pour les autres Tables et documents, nous renverrons le lecteur à l'ouvrage qui a été publié par l'Institut des Actuaires (*the Mortality experience of life assurance Companies*, chez Layton, éditeur; Londres, 1869). Nous résumerons cependant ici les principales particularités que fait ressortir la préface de cet ouvrage.

90. A égalité d'âge, la mortalité est beaucoup plus faible si l'on se trouve dans les premières années de l'assurance que si l'assurance date déjà de 5 ou 6 ans. Cela tient à ce que les individus mal portants ont été éliminés par suite de l'examen médical qui est imposé à tous les assurés : il y a eu ce qu'on appelle une *sélection médicale*, dont l'influence favorable tend naturellement à diminuer à mesure que la durée de l'assurance augmente. Le tableau suivant, dressé comme exemple, pour les âges compris entre 35 et 39 ans, indique comment se perd peu à peu le bénéfice de cette sélection médicale :

MORTALITÉ POUR 100 (HOMMES ET FEMMES) DE 35 A 39 ANS.									
ANNÉES D'ASSURANCE.								TABLE de Carlisle.	POPULATION générale de la France.
1re.	De 1 à 5.	De 6 à 10.	De 11 à 15.	De 16 à 20.	5 et au-dessus	10 et au-dessus.	Sans distinction.		
0,43	0,83	1,06	1,12	1,45	1,10	1,17	0,97	1,09	0,924

Ainsi, pendant la 1re année d'assurance, la mortalité n'atteint pas moitié de la mortalité générale des assurés ; pendant les cinq premières années prises en bloc, elle lui est encore inférieure; mais, au delà de la 5e année, elle la dépasse d'une quantité qui va généralement en augmentant ; et, après 15 à 20 ans d'assurance, la mortalité est de moitié supérieure à la mortalité générale des assurés. Cela tient à ce que les assurés bien portants ont une tendance à résilier leurs contrats, tandis que les autres les maintiennent en vigueur. L'influence favorable de la sélection médicale dure donc environ 5 ans, et, après ces 5 ans écoulés, il y a une antisélection naturelle, qui fait que les risques restant en cours sont les plus mauvais.

Il y a plus : comme le taux général, sans distinction de la durée d'assurance, est supérieur à celui que donne la Table de la population générale de France, dressée sur un ensemble de population (*voir* la Table des taux), ce serait une preuve que les individus assurés, dont les polices sont en cours à un moment donné, forment un groupe dont la mortalité moyenne est plus forte, à âge égal, que celle de l'ensemble d'une population. Ainsi l'antisélection naturelle, ou le départ des bons risques, exercerait une influence défavorable, qui ferait plus que contre-balancer l'influence heureuse de la sélection médicale. Nous reviendrons, au n° 117, sur cette comparaison entre les taux fournis par cette Table et ceux qui se rapportent à la population générale de France ; car il y a là, au point de vue des assurances sur la vie, une considération importante dont il faut tenir compte.

Pour les âges autres que celui que nous avons pris pour exemple, on constate des résultats analogues.

La mortalité des femmes assurées est notablement plus forte dans la jeunesse que celle des hommes assurés : de 15 à 20 ans elle est presque double. Cette différence diminue progressivement avec l'âge : à 50 ans, il y a égalité, et au delà de 50 ans on constate le résultat inverse. La mortalité des hommes l'emporte alors, et la différence va à son tour en

croissant avec l'âge; dans l'extrême vieillesse, de 90 à 99 ans, la mortalité des hommes est de moitié supérieure à celle des femmes.

Les individus mal portants au moment de l'assurance ont donné une mortalité qui, au-dessous de l'âge de 65 ans, est de 70 pour 100 plus forte que celle des individus bien portants du même âge, et, au-dessus de l'âge de 65 ans, de 30 pour 100 plus forte.

91. *Ajustement de la Table.* — Si l'on examine la Table non ajustée qui a été donnée ci-dessus, on constate souvent de grandes divergences entre les taux de mortalité de deux âges voisins; cela tient à ce que le nombre de têtes observées n'a pas encore été assez considérable. Ainsi, bien que les observations aient porté en tout, pour cette Table, sur 146 847 têtes assurées, il n'y avait, à l'âge de 11 ans, que 713 têtes ayant couru le risque de décès entre 11 et 12 ans, et sur ces 713 têtes il ne s'est produit aucun décès entre ces deux âges. Nous savons que l'on fait disparaître ces divergences en ajustant la Table, ce qui a l'avantage de faire porter les observations sur un plus grand nombre de têtes, et aussi de donner à la Table une forme appropriée aux exigences de la pratique. L'ajustement se fait toujours en tenant compte, pour chaque âge et dans une juste mesure, des résultats des observations faites pour les âges voisins. Diverses méthodes ont été employées pour faire cet ajustement; nous indiquerons brièvement celle qui a été appliquée aux Tables anglaises par M. Woolhouse (*Journal des Actuaires anglais*, vol. XIV).

M. Woolhouse fait porter ses corrections, non sur les taux de mortalité, mais sur le nombre des vivants à chaque âge, élément plus maniable. Ainsi que tous les auteurs anglais, il désigne le nombre des vivants à l'âge x par l_x (initiale du mot *living*, vivants), et, comme l'a fait M. Maas dans ses derniers travaux, nous adopterons également cette notation, pour une raison d'uniformité. Si l'on commence à l'âge de 10 ans, qui

est le premier âge inscrit dans la Table, et que l'on extraye de celle-ci les nombres de vivants de 5 en 5 ans, l_{10}, l_{15}, $l_{20}, \ldots$, on peut déterminer par interpolation les nombres de vivants aux âges intermédiaires, et obtenir ainsi une série continue ; géométriquement parlant, cela revient à faire passer une courbe par les points correspondant aux périodes quinquennales. L'adoption de cette courbe comme base de la Table aurait l'inconvénient de ne faire aucun usage des données fournies par l'expérience pour les âges intermédiaires. On y remédie en prenant, au lieu d'une seule série, cinq séries ayant des points de départ distincts, et chevauchant l'un sur l'autre, séries qui sont les suivantes :

$$l_{10}, \quad l_{15}, \quad l_{20}, \ldots;$$
$$l_{11}, \quad l_{16}, \quad l_{21}, \ldots;$$
$$l_{12}, \quad l_{17}, \quad l_{22}, \ldots;$$
$$l_{13}, \quad l_{18}, \quad l_{23}, \ldots;$$
$$l_{14}, \quad l_{19}, \quad l_{24}, \ldots.$$

On fait ensuite une interpolation séparée pour chacune de ces séries, ce qui donne pour chaque valeur de l cinq nombres différents, et enfin on prend la moyenne de ces cinq nombres, pour la valeur définitive de l à chaque âge. Inscrivant toutes ces valeurs moyennes l'une au-dessous de l'autre, on obtient la Table de mortalité ajustée que l'on se proposait d'établir. Géométriquement parlant, cela revient à tracer cinq courbes s'appuyant toutes sur des points quinquennaux, et à prendre pour chaque âge, comme ordonnée définitive, la moyenne des ordonnées déterminées par les cinq courbes.

Il n'est pas nécessaire de calculer complétement les nombres de toutes les séries : on peut, au moyen de formules d'interpolation, calculer la valeur moyenne de l à chaque âge, c'est-à-dire la valeur définitive cherchée. M. Woolhouse arrive ainsi à la formule suivante, dont on trouvera au besoin la démonstration dans son ouvrage : *Tables deduced from the Mortality experience*, chez Layton, éditeur; Londres, 1872. Si l'on veut obtenir le nombre de vivants à 25 ans, après ajuste-

ment, l'_{25}, il faut poser

$$a_1 = l_{24} + l_{26}, \quad a_2 = l_{23} + l_{27},$$
$$a_3 = l_{22} + l_{28}, \quad a_4 = l_{21} + l_{29},$$
$$a_6 = l_{19} + l_{31}, \quad a_7 = l_{18} + l_{32},$$
$$f = a_1 - a_3, \quad g = a_2 - a_3,$$
$$h = a_6 - a_3, \quad k = a_7 - a_4,$$

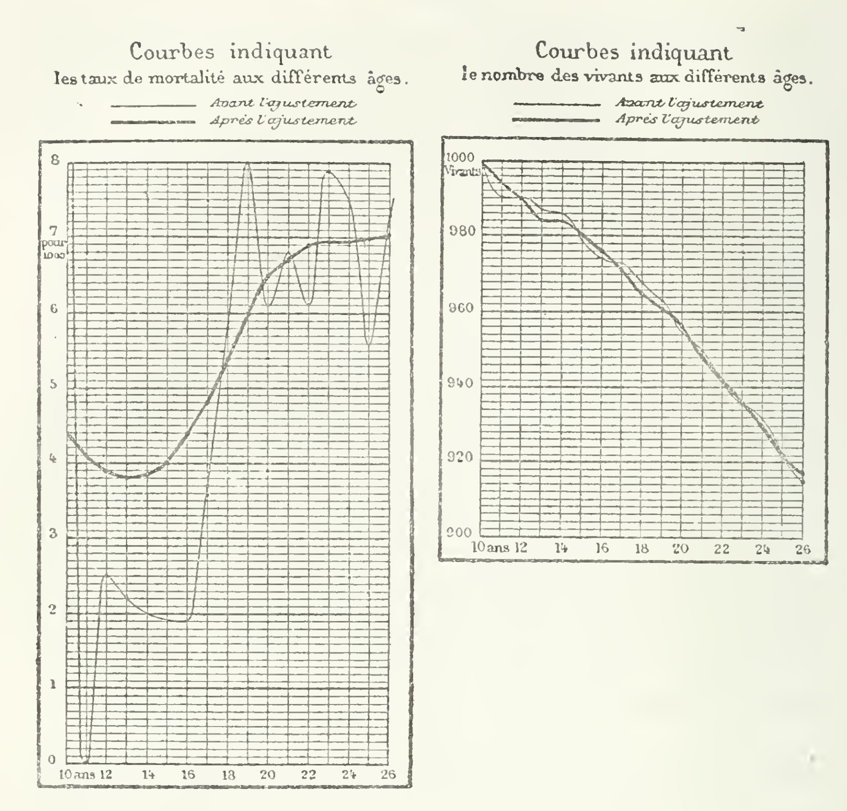
et l'on a

$$5l'_{25} = l_{23} + a_1 + a_2 - 0{,}04(f + 4g + 2h + 3k).$$

Ainsi, le nombre l des vivants à 25 ans dans la Table H[M] étant 9297, le nombre l' dans la Table ajustée se trouve égal, après application de cette formule, à 9306,1. Nous reproduisons à la fin du volume cette Table H[M], ajustée par M. Woolhouse, tant comme Table de survie que comme Table de mortalité. Le rapprochement des nombres ajustés avec les nombres originaux permet de constater quelle a été pour chaque âge l'influence de l'ajustement, tant sur les nombres de vivants que sur les taux.

92. L'ajustement des Tables est indispensable pour la pratique. Par ce mode de correction raisonnée, on ne change que de quelques unités le nombre des vivants à un âge déterminé, mais on change souvent beaucoup le taux de mortalité d'une certaine année. L'influence de l'ajustement est facile à mettre en évidence au moyen de courbes.

La courbe du nombre des vivants, dont nous donnons un fragment, entre les âges de 10 et de 26 ans (*voir* plus loin au n° 113 pour la signification de ces courbes) diffère peu après l'ajustement de ce qu'elle était avant; mais, au contraire, il y a de grandes différences entre les courbes qui représentent les taux de mortalité. Celles-ci présentaient avant l'ajustement des soubresauts brusques, qui disparaissent après l'ajustement pour faire place à une ligne continue et d'allure régulière. Voici un fragment de ces courbes, entre les âges de 10 et 26 ans.



93. Dans le mode d'ajustement ci-dessus exposé, le nombre des vivants définitivement adopté pour un âge quelconque est la moyenne de cinq nombres calculés isolément. On peut admettre que chacun de ces cinq nombres a, au point de vue de l'approximation probable, une autorité un peu moins grande que le nombre original de l'âge en question, mais cependant presque égale. On peut donc admettre que le nombre de vivants obtenu après ajustement présente une approximation probable aussi grande que s'il y avait eu en observation un nombre de têtes quatre fois plus grand qu'il n'y en a eu réellement. La même approximation probable s'appliquera aux taux de mortalité déduits de la Table ajustée. Nous pouvons, en suivant cette règle, calculer, comme nous l'avons fait pour la Table de Deparcieux, quelle est l'approxi-

mation probable que présente la Table anglaise, aussi bien après qu'avant l'ajustement.

L'exemple traité ci-dessus, au n° 64, répond à cette question pour l'âge de 30 ans. Pour la Table non ajustée, il n'y a que 96 contre 4 à parier que le taux de mortalité 0,0084 est exact à 0,001 près. Pour la Table ajustée, il faut, dans la formule (23), prendre s quatre fois plus grand, ce qui rend également α quatre fois plus grand, et donne pour la probabilité cherchée P la valeur 0,999, de sorte qu'on peut considérer le nouveau taux 0,00806, qui est calculé après ajustement, comme certainement exact à 0,001 près, et la chance de décès comme certainement comprise entre 0,00706 et 0,00906.

Si l'on cherche quelle est la probabilité d'une approximation plus grande, on trouve par la même formule qu'il y a une probabilité de

0,60	que le taux de mortalité à 30 ans, après ajustement, soit 0,00806, est approché en plus ou en moins de	0,0001	et que, par conséquent, le taux véritable est compris entre les limites........	0,00796 et 0,00816
0,91	id.	0,0002	id.	0,00786 et 0,00826
0,99	id.	0,0003	id.	0,00776 et 0,00836
0,999	id.	0,0004	id.	0,00766 et 0,00846

On calculera de la même manière qu'il y a une probabilité de

0,90	que le taux de mortalité à 60 ans, après ajustement, soit 0,02873, est approché en plus ou en moins de	0,001	et que, par conséquent, le taux véritable est compris entre les limites.......	0,02773 et 0,02973
0,999	id.	0,002	id.	0,02673 et 0,03073

Il suit de là que, même dans la Table ajustée, on ne peut compter avec certitude sur les trois premières décimales des

taux de mortalité (en forçant la troisième au besoin), que vers les âges moyens, de 30 à 40 ans environ ; pour les âges extrêmes, 15 ans environ ou 60 ans environ, on ne peut plus compter que sur les deux premières décimales (en forçant la deuxième au besoin). Ces conclusions concordent parfaitement avec les inductions que l'on peut tirer d'une comparaison entre les taux de mortalité au même âge, avant et après l'ajustement.

§ VI. — *Tables de mortalité de la Compagnie d'Assurances générales.*

94. En France, M. de Kertanguy a dressé, en 1874, une Table de mortalité relative aux assurés de la Compagnie française d'Assurances générales. Il a suivi à peu près les mêmes procédés que la Société des Actuaires anglais, et il a du reste publié lui-même son travail dans le *Journal des Actuaires français* (1874) : il serait donc inutile de le reproduire ici. Ses résultats concordent à très-peu de chose près avec ceux des Tables des vingt Compagnies; malheureusement, ils proviennent de l'observation de 24699 têtes seulement. On peut en conclure, d'après les tableaux donnés au n° 66, qu'ils ne présentent qu'une approximation probable, en plus ou en moins, de 0,002 vers l'âge de 30 ans, et de 0,01 vers l'âge de 60 ans. Il est à désirer que le même travail soit entrepris sur les assurés de toutes les Compagnies françaises réunies, ce qui permettrait d'observer un nombre de têtes beaucoup plus considérable, et d'obtenir une approximation probable de 0,001 vers l'âge de 30 ans, et de 0,005 vers l'âge de 60 ans.

CHAPITRE VI.

TABLES DE MORTALITÉ DRESSÉES SUR DES GROUPES DE POPULATION.

§ I. — *Généralités.*

95. Quand une Table de mortalité par âges est dressée sur l'ensemble de la population d'une ville ou d'un grand pays, elle n'a plus du tout la même valeur que les Tables dressées sur des têtes choisies. En effet, les habitants d'une ville, même en ne groupant ensemble que ceux du même âge, ne forment pas une couche homogène de population. Certains d'entre eux sont mal constitués, d'autres sont actuellement malades, d'autres présentent des risques exceptionnels en raison de leurs occupations spéciales, ou des voyages dangereux qu'ils pourront faire, etc. Tous les gens du même âge n'ont donc plus la même probabilité de décès ; et, si le rapport du nombre des décès au nombre de têtes exposées, à un âge déterminé, donne bien encore la probabilité moyenne de décès, il ne sera plus exact de considérer cette moyenne comme représentant le risque de décès de l'un quelconque des individus formant le groupe d'âge égal que l'on a considéré. Si nous reprenons ici les deux syllogismes que nous avons posés plus haut (n° 62), comme étant le point de départ de l'établissement des Tables de mortalité par âges, nous voyons que tous deux tombent à faux, parce que la mineure du premier et la majeure du second cessent toutes deux d'être exactes.

Néanmoins, ces Tables de mortalité pourront encore être d'une grande utilité. On ne les emploiera plus guère dans les questions où il s'agit d'évaluer le mieux possible le risque

de décès d'un individu déterminé, comme dans les questions d'assurances sur la vie ; mais on y aura recours pour les prévisions d'une plus haute portée, qui concernent plutôt les ensembles de population que les individus isolés. On s'en servira, par exemple, pour comparer : 1° à la population de moins de 5 ans le nombre des enfants recueillis dans les crèches et dans les asiles ; 2° à la population de 6 à 12 ans et de 13 à 20 le nombre des élèves qui suivent les écoles ou les colléges; 3° à la population masculine de 20 à 30 ans l'effectif de l'armée ; 4° à la population masculine de plus de 21 ans le nombre des électeurs, etc... On les utilisera encore pour étudier les questions d'hygiène et de salubrité, pour comparer les mortalités d'une ville à une autre, d'un pays à un autre, d'un mois de l'année à l'autre, d'une période de temps à une période précédente, etc.

Tout en limitant dès le début l'autorité qu'on peut attribuer à ces Tables de mortalité dressées par ville ou par région, nous donnerons donc quelques indications sur les méthodes qui sont employées pour les établir. Ici, en effet, il ne s'agit pas seulement, comme pour les Tables dressées sur des têtes choisies, d'enregistrer des faits certains : il faut faire diverses hypothèses, et par conséquent procéder au moyen de méthodes, qui donneront des résultats plus ou moins approchés de la réalité. Nous allons faire connaître quatre de ces méthodes.

§ II. — *Méthode d'Halley ou méthode des décès.*

96. Pour établir, d'après la méthode d'Halley, la Table de mortalité d'une ville déterminée, il suffit de connaître quel a été, pendant quelques années consécutives, le nombre des décès de chaque âge.

Supposons qu'ayant relevé tous les décès par âges pendant 4 ou 5 ans, et prenant la moyenne de ces quatre ou cinq

séries de nombres, on ait constaté qu'il est mort, année moyenne,

	1040	personnes âgées de		0	à	1	an.
	204	»	»	1	à	2	ans.
	123	»	»	2	à	3	»
	27	»	»	20	à	21	»
	1	»	»	99	à	100	»
Total	4712	décès, année moyenne.					

On est obligé d'admettre que depuis un siècle :

1° La loi de mortalité n'a pas changé ;

2° Il n'y a eu ni émigration ni immigration, c'est-à-dire que tous les individus nés dans la ville y sont également morts, et réciproquement ;

3° Le nombre des naissances annuelles est constamment resté le même.

Si l'on admet ces trois hypothèses, on voit qu'un groupe de 4712 personnes, supposées nées dans la ville, il y a un siècle, auront donné :

La	1re	année,	1040	décès de	0	à	1	an,
La	2e	»	204	»	1	à	2	ans,
La	3e	»	123	»	2	à	3	ans,

jusqu'à épuisement complet, ce qui permet évidemment de calculer les taux de mortalité par âges de ce groupe de 4712 individus.

C'est la méthode que le docteur Halley a appliquée à la ville de Breslau, pour les années 1687 et 1690, et elle lui a servi à dresser la première Table de mortalité un peu régulière dont on ait fait usage. Elle ne présente guère aujourd'hui qu'un intérêt historique, car on ne l'applique plus, à cause des nombreuses causes d'inexactitudes qu'elle entraîne.

97. La première cause d'erreur vient de ce que les âges au décès, qui sont la base de tout le travail, ne sont jamais connus exactement. On les inscrit sur les registres mortuaires d'après les déclarations des amis ou des parents du décédé,

et ces déclarations sont à peine exactes à cinq ou six ans près. Aussi l'on remarque que les décès inscrits aux âges ronds, 40, 50, 60 ans, sont toujours bien plus nombreux que les autres, à cause du peu de soin que l'on apporte dans ces déclarations, dépourvues de tout contrôle.

La seconde cause d'erreur vient de ce que la loi de mortalité ne reste pas constante dans le cours d'un siècle : cette cause d'erreur est du reste commune à plusieurs autres méthodes (*voir* n° 70).

La troisième vient de ce que la population d'un pays, et même d'une ville, ne reste pas stationnaire. Il y a des émigrations, c'est-à-dire que certains individus nés dans la ville sont décédés ailleurs : dans ce cas, le taux de mortalité correspondant à l'âge qu'ils avaient à leur décès est obtenu trop faible. L'inverse se produit pour les immigrations, c'est-à-dire pour les gens qui viennent mourir dans la ville, et qui n'y sont pas nés. Ces deux erreurs ne se balanceraient que si les décès des uns et des autres avaient lieu en même nombre aux mêmes âges, ce que l'on ne peut pas supposer. Cette cause d'erreur sera d'autant plus grande que l'on voudra appliquer la méthode en question à une ville plus industrielle, plus remuante. Halley s'en était bien rendu compte, et c'est pourquoi, au lieu d'opérer sur Londres ou Dublin, il avait choisi la petite ville de Breslau, en Silésie, où il avait constaté que la population éprouvait peu de mouvements.

98. Voici quelques remarques qui permettent, sinon d'évaluer l'influence des migrations, au moins de se rendre compte des âges auxquels elles se produisent.

Dans toutes les parties d'un même pays, il y a des départs importants de jeunes gens d'une vingtaine d'années, qui entrent au service militaire. Ils se trouvent compris dans la population flottante des villes et des camps ; l'influence de ces départs à âge fixe peut être évaluée avec quelque exactitude.

A Paris, il y a des départs considérables d'enfants venant de naître, que l'on met en nourrice dans les campagnes des envi-

rons, et dont beaucoup y meurent dans leur première année. On observe aussi à Paris des arrivées importantes d'hommes de 20, 30, 40 ans, qui viennent y passer la partie active de leur existence, et des départs de vieillards qui vont se retirer à la campagne, et qui y restent jusqu'à leur décès. Les mêmes effets se produisent dans les grandes villes, dans une proportion moins forte.

Dans les campagnes, on constate les mêmes effets en sens inverse, c'est-à-dire des arrivées et des décès d'enfants en bas âge et de vieillards qui sont réellement originaires des villes, et des émigrations d'hommes faits qui s'en vont dans les villes.

Dans certaines contrées, et pour la France par exemple, en Auvergne, en Savoie, dans la Creuse, les Hautes-Alpes, etc., un grand nombre d'ouvriers émigrent pour aller passer une partie de l'année, ou même plusieurs années, à Paris ou à Lyon, pour y exercer certaines professions. Ces voyages ne sont guère faits que par les hommes qui sont dans la force de l'âge, et en bon état de santé. De même, les individus appartenant aux classes riches dans les grandes villes voyagent beaucoup pendant la belle saison, mais seulement quand ils sont en bon état de santé.

99. Même abstraction faite des migrations, la population d'une ville ne reste pas stationnaire pendant un siècle : elle augmente constamment, à cause de l'excès annuel des naissances sur les décès. Il suit de là que les taux de mortalité obtenus doivent être tous trop faibles ; et il y aura, de ce chef, une erreur d'autant plus grande que l'on s'occupera d'un âge plus avancé.

100. *Exemple.* — Si l'on applique la méthode des décès à l'étude de la mortalité en France, en prenant les nombres moyens de décès par âges de 1861 à 1865, et que l'on compare les résultats obtenus avec ceux que donne une méthode plus exacte, la *méthode directe*, qui sera exposée plus loin (n° 105), on constate les divergences suivantes :

A la naissance, le taux de mortalité (par la méthode des décès) est un peu plus élevé.

Depuis 1 an jusqu'à 70 ans, les taux de mortalité sont tous plus faibles : la divergence atteint jusqu'à un quart de la valeur absolue de ces taux de mortalité.

Enfin, depuis 70 ans jusqu'à la fin de la vie, les taux sont tous plus forts : ils atteignent le double en valeur absolue.

Ceci montre que la cause prédominante d'erreur provient de l'augmentation du nombre annuel des naissances dans le cours d'un siècle. Pour les âges avancés, cette cause d'erreur est contre-balancée, et au delà, par l'influence des immigrations, qui finit même par l'emporter, et par donner des différences importantes en sens contraire.

101. On a essayé de corriger les résultats obtenus par la méthode des décès, de manière à supprimer ou au moins à diminuer la quatrième cause d'erreur, qui tient à l'augmentation de la population par l'excès des naissances sur les décès. Supposons que l'on ait pris pour point de départ de la Table l'année 1790, que les naissances dans la ville dont on s'occupe aient été de 1000 en 1790 et de 1300 en 1830 : alors le nombre des décès des personnes âgées de 30 ans et survenus en 1830 devra être augmenté de 30 pour 100 pour représenter le nombre réel que l'on aurait obtenu si le nombre des naissances avait été, dès 1790, de 1300. Une correction analogue, mais croissant en importance, sera appliquée à tous les âges.

M. Quetelet a indiqué un autre mode de correction, et l'a appliqué à la Belgique, en partant de l'année 1770. Il compare les nombres de vivants par âges, observés à diverses époques au moyen des recensements, aux nombres des vivants calculés par la méthode des décès : leur rapport donne précisément les coefficients par lesquels il faut multiplier les décès de chaque âge. Voici le résumé de son travail.

AGES.	NOMBRES DE VIVANTS		RAPPORTS.
	observés.	calculés.	
0	10000	10000	1,00
5	7253	6284	1,15
10	6886	5822	1,21
10	6350	5225	1,26
30	....	....	1,30
40	....	....	1,33
50	....	....	1,32
60	....	....	1,31
70	....	....	1,30
80	....	....	1,25
90	....	....	1,35

Ces deux modes de correction peuvent se contrôler l'un par l'autre ; mais ils ne suffisent pas pour rendre actuellement assez exacte la méthode des décès.

§ III. — *Méthode des recensements.*

102. On peut encore dresser une Table de mortalité en notant, d'après les listes des recensements, le nombre des vivants à chaque âge. Si l'on appelle l_0, l_1, l_2,... ces nombres de vivants, et si l'on suppose que la population est restée complétement stationnaire depuis un siècle, la différence $l_1 - l_0$ représentera le nombre de décès d'enfants de 0 à 1 an qui ont eu lieu dans l'année qui vient de s'écouler ; $l_2 - l_1$ représentera de même les décès d'enfants de 1 à 2 ans qui ont eu lieu dans cette même année, etc. : les nombres obtenus donneront donc une Table de mortalité toute faite.

Cette méthode ne suppose pas que la loi de mortalité est restée constante, car tous les taux de décès se rapportent à l'année qui vient de s'écouler ; mais elle oblige d'admettre qu'il n'y a eu depuis un siècle ni émigration, ni immigration, ni accroissement de la population par l'excès des nais-

sances sur les décès. On peut corriger ce défaut, mais en faible partie seulement, en prenant plusieurs listes de recensement, faites à diverses époques, et en voyant quelle marche suit le mouvement de la population. De plus, une autre cause de graves erreurs vient de ce que, lors des recensements, on ne peut pas apporter assez de soins à la déclaration et au contrôle des âges des vivants.

Aussi cette méthode n'a jamais été employée pour dresser de véritables Tables de mortalité ; mais elle peut fournir des renseignements statistiques utiles pour d'autres travaux, par exemple au point de vue du nombre des jeunes gens à soumettre au recrutement.

§ IV. — *Méthode des registres de l'État civil.*

103. On suppose que les naissances d'une année sont distribuées uniformément dans le cours de cette année, de sorte qu'en prenant la moyenne du nombre des naissances pendant deux années consécutives, 1848 et 1849 par exemple, on peut considérer ce nombre comme un nombre égal d'enfants nés le 1er janvier 1849. C'est ce groupe d'enfants que l'on va suivre pendant toute son existence, en notant les survivants d'année en année. Pour avoir ces nombres de survivants, il faut encore s'en rapporter aux nombres de décès par âges, qui sont inscrits sur les registres mortuaires. Les calculs successifs s'établissent comme dans l'exemple qui suit :

DATES.	AGES.	NOMBRES de vivants en France.	DÉCÈS.		TAUX de MORTALITÉ.
			Nombre.	Ages et époques.	
1er janvier 1849.	0	963002	193415	0 à 1 an en 1849	0,200
1er » 1850.	1	769587	42322	1 à 2 ans en 1850	0,055
1er » 1851.	2	727065	25531	2 à 3 ans en 1851	0,035
1er » 1852.	3	701534	16019	3 à 4 ans en 1852	0,023
1er » 1853.	4	685515	.....	....	.....
....	.	......	.....	....	.....

Il y a eu en France 940 156 naissances en 1848, et 985 848 en 1849; on admet que cela équivaut à 963 002 enfants naissant le 1er janvier 1849. On observe, en 1849, 193 415 décès d'enfants âgés de 0 à 1 an ; ils ne peuvent appartenir qu'à ce groupe, qui se réduit ainsi au 1er janvier 1850, par différence, à 769 587 enfants âgés de 1 an. En 1850, on observe 42 322 décès d'enfants de 1 à 2 ans, ce qui réduit le groupe à 727 065 enfants de 2 ans, vivants au 1er janvier 1851. Déduisant le nombre de décès d'enfants de 2 à 3 ans arrivés en 1851, soit 25 531, le groupe se réduit, au 1er janvier 1852, à 701 534 vivants, et ainsi de suite. On obtient donc d'année en année le nombre des survivants et les taux de mortalité.

On ne se contente pas d'opérer sur un seul groupe d'enfants, on prend ensuite la série suivante, comprenant les naissances de 1849 et 1850, et l'on dresse un tableau analogue, en relevant les décès de 0 an en 1850, les décès de 1 an en 1851, etc. On prend ainsi autant de séries que l'on veut, et l'on adopte, pour les taux de mortalité, la moyenne des résultats obtenus. Si la loi de mortalité ne change pas avec le temps, on obtient les taux avec une plus grande approximation ; si elle change, on obtient pour le taux à chaque âge la moyenne des valeurs qu'il a présentées pendant les diverses années considérées.

104. Cette méthode présente plusieurs causes d'erreur.

Si toutes les naissances ne sont pas enregistrées, ou s'il y a des immigrations, les taux de mortalité obtenus sont trop forts. Si tous les décès ne sont pas enregistrés, ou s'il y a des émigrations, ou si la population augmente, suivant la loi naturelle constante, les taux obtenus sont trop faibles. On a à redouter en outre les déclarations inexactes concernant les âges des décédés.

Enfin les naissances d'une année ne sont pas uniformément réparties dans toute l'année; elles suivent généralement la loi suivante : sur 1000 naissances, il y en a 88 en janvier,

84 en février, 93, 87, 84, 79, 80, 80, 80, 83, 81, 81 dans les mois suivants. Les enfants nés en 1848 et 1849 ont donc au 1er janvier 1849 l'âge moyen de 7 jours. Cette dernière cause d'erreur est facile à éliminer.

§ V. — *Méthode directe.*

105. Dans cette méthode, on combine les indications du recensement avec celles des registres de décès. Le recensement, qui donne les âges des individus recensés, indique le nombre des vivants à un âge quelconque, à 20 ans par exemple. Les registres des décès indiquent de leur côté quel est, pendant une année, le nombre des décès d'individus âgés de 20 ans : le rapport de ces deux nombres donnera le taux de mortalité à 20 ans. On opérera de même pour tous les autres âges.

M. le Dr Farr a modifié cette méthode, en suivant un procédé dont il donne les détails dans le volume IX du *Journal des Actuaires anglais* et dont voici le résumé. Les déclarations d'âges faites soit au recensement, soit au décès, sont souvent inexactes, mais de quelques années seulement, et tantôt en plus, tantôt en moins (considération importante), de sorte que, si l'on prend tous les vivants déclarés de 15 à 25 ans (c'est-à-dire de plus de 15 et de moins de 25 ans), on aura leur nombre plus exactement que s'il s'agissait d'une seule année. On fera de même pour les décès, et le rapport de ces deux nombres donnera avec une approximation raisonnable le taux de mortalité à l'âge moyen, c'est-à-dire à 20 ans. On déterminera de même les taux de mortalité à d'autres âges, 30, 40, 50 ans, et entre deux de ces âges, qui tous sont espacés de 10 ans, on déterminera les autres taux par interpolation. Pour faire cette interpolation, le Dr Farr s'appuie sur cette remarque, qu'entre deux limites fixées les taux de mortalité augmentent d'année en année en progression géométrique ; et il a appliqué cette méthode aux districts riches de l'Angle-

terre, pour en déduire une Table de mortalité qui porte son nom (1861).

Il paraîtrait préférable de ne recourir à aucune hypothèse sur la loi de progression du taux de mortalité entre deux âges déterminés, 20 et 30 ans ou 30 et 40. Il y aurait alors à déterminer le nombre des vivants et le nombre des décès à 21 ans et à tout autre âge, par des moyennes décennales, comme on a fait pour l'âge de 20 ans : on prendrait tous les vivants déclarés de 16 à 26 ans, tous les décès déclarés de 16 à 26 ans, et le rapport entre ces deux nombres donnerait le taux cherché, à l'âge de 21 ans ; de même pour 22 ans, etc.... Une fois les taux obtenus pour tous les âges, on n'aurait plus qu'à leur faire subir un ajustement pour obtenir une Table de mortalité définitive.

106. La méthode directe, que l'on ne peut appliquer que dans les pays où les recensements sont très-soigneusement faits, est beaucoup plus exacte que la méthode des décès. Elle échappe aux causes d'erreur provenant de l'émigration et de l'accroissement annuel de la population. Elle a, de plus, l'avantage de donner les taux de mortalité avec leurs valeurs actuelles, et non pas avec la valeur qu'ils avaient il y a 100 ans, 99 ans, 98 ans, etc., comme on les obtient quand on opère sur des têtes choisies (*voir* ce qui a été dit à ce sujet au n° **70**).

Les seules causes d'erreurs auxquelles elle reste sujette sont les suivantes :

1° Le recensement, qui se fait à une date fixe, peut accuser une population plus forte ou plus faible que celle qui est, en moyenne, soumise pendant le cours de l'année aux chances de décès. Si elle est plus forte, les taux de mortalité obtenus sont trop faibles, et réciproquement.

2° Certains individus peuvent échapper au recensement : les taux obtenus sont alors trop forts. D'autres peuvent être recensés deux fois, ce qui produit l'effet inverse.

3° Les âges déclarés, sans contrôle, au recensement, peuvent

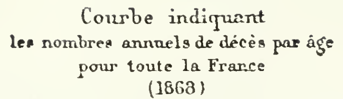
être moins élevés que les âges réels : les taux obtenus sont alors trop forts, puisque la population totale, comptée par âges réels, est toujours plus forte aux âges les plus jeunes. Si les âges déclarés sont plus élevés que la réalité, c'est l'effet inverse qui se produit, et les taux obtenus sont trop faibles.

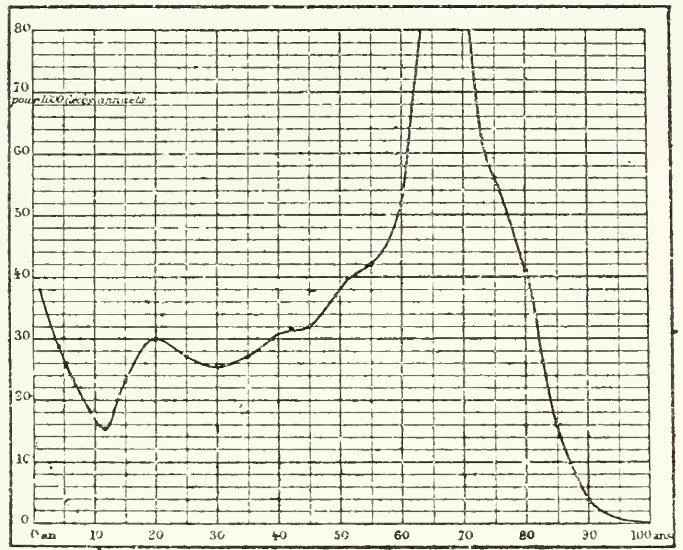
4° Certains décès peuvent être omis : les taux obtenus sont alors trop faibles.

5° Les âges déclarés aux décès, sans contrôle, peuvent être moins élevés que la réalité. Dans ce cas encore, les taux obtenus sont inexacts, mais cette erreur ne se produit pas toujours dans le même sens. S'il s'agit d'une période de la vie où le nombre des décès par âges augmente quand l'âge augmente de quelques années, l'erreur ci-dessus aura pour résultat d'accuser un nombre de décès trop faible, et par conséquent fera obtenir des taux trop faibles. On obtiendra au contraire des taux trop forts s'il s'agit d'une période de la vie où le nombre des décès par âges diminue quand l'âge augmente. Si les âges déclarés aux décès sont plus élevés que la réalité, l'effet inverse se produira.

Pour se rendre compte de l'effet réel que pourront produire à tel ou tel âge ces déclarations inexactes, en ce qui concerne les âges au décès, il suffit de jeter les yeux sur la courbe ci-contre, qui indique quels sont les nombres de décès par âges, pour toute la France. On voit par exemple que, de 30 à 65 ans, le nombre des décès par âges augmente constamment avec l'âge ; par conséquent, dans cette période de la vie, si les âges déclarés aux décès sont moins élevés que la réalité, on obtiendra des taux trop faibles.

107. La méthode directe est appliquée en France par le Ministère de l'Agriculture et du Commerce, pour obtenir, après chaque recensement, les taux de mortalité relatifs à l'ensemble de la population française. Le dernier travail publié par cette Administration est celui qui a suivi le recensement de 1866 ; le travail, actuellement sous presse, qui se rapporte au recensement de 1872, sera moins concluant au





point de vue général, à cause de la période exceptionnelle qu'il devra embrasser.

Dans le travail fait après le recensement de 1866, la population moyenne par âges a été calculée de 5 en 5 ans d'après les recensements combinés de 1861 et de 1866, et les nombres moyens de décès par âges ont été déduits des Tables annuelles des décès des 5 dernières années révolues, 1861 à 1865. Les taux de décès de 5 en 5 ans ont été obtenus par de simples divisions; et les nombres de survivants, sur un nombre supposé de 100000 naissances, s'en déduisent sans difficulté de la manière suivante.

Supposons qu'ayant obtenu le nombre des survivants à 10 ans, $l_{10} = 66770$, on veuille calculer l_{15}. Le chiffre total de la population entre 10 et 15 ans est $5\frac{l_{10}+l_{15}}{2}$, et le nombre de décès auxquels donnera lieu cette période de 5 ans est

égal à $5 \times 0{,}51 \frac{l_{10} + l_{15}}{2}$, puisque 0,51 est le taux moyen de mortalité. On aura donc

$$l_{15} = l_{10} - 5 \times 0{,}51 \frac{l_{10} + l_{15}}{2} = l_{10} \frac{2 - 0{,}0255}{2 + 0{,}0255} = 65082.$$

On calculera ainsi de proche en proche tous les nombres de survivants. Le tableau ci-après indique les chiffres qui ont servi de base, et qui proviennent du dépouillement direct des registres, ainsi que les résultats obtenus, pour chaque âge, de 5 en 5 ans.

Table de mortalité de la population de la France

(1861-1865).

AGES.	POPULATION moyenne.	DÉCÈS ANNUELS moyens.	TAUX de mortalité moyens, par année, (pour 100 habitants).	NOMBRE de vivants.	AGES.
0-0 ans	»	»	»	100000	0 ans
0 à 1	816417	180180	22,070	80120	1
1 à 5	2847498	101730	3,573	69437	5
5 à 10	3313931	25938	0,783	66770	10
10 à 15	3206320	16413	0,512	65082	15
15 à 20	3239440	22538	0,696	62586	20
20 à 25	3107578	29369	0,945	59954	25
25 à 30	2959746	26002	0,879	57376	30
30 à 35	2775549	24921	0,898	54856	35
35 à 40	2665677	24633	0,924	52379	40
40 à 45	2478352	26716	1,078	49630	45
45 à 50	2322233	28565	1,231	46677	50
50 à 55	2043938	33731	1,650	42969	55
55 à 60	1733527	38155	2,201	38487	60
60 à 65	1527979	53248	3,485	32318	65
65 à 70	1171986	59393	5,068	25050	70
70 à 75	762441	59813	7,844	16836	75
75 à 80	425766	53055	12,461	8838	80
80 à 85	187109	37016	19,783	2989	85
85 à 90	58456	15637	26,750	593	90
90 à 95	12136	3784	31,180	74	95
95 à 100	2229	794	35,621	5	100
100, etc.	192	105	54,687	»	»
TOTAUX.	37658500	861736	Moy. 22,88		

108. Les résultats obtenus seraient plus exacts si l'on reproduisait le même calcul sur cinq séries chevauchant l'une sur l'autre, et embrassant : la première, les âges de 5-10, 10-15,... ; la deuxième, les âges 6-11, 11-16,... ; la troisième, les âges 7-12, 12-17,.... On calculerait ensuite les nombres

de vivants et les taux moyens définitifs en employant une méthode d'ajustement analogue à celle que M. Woolhouse a appliquée à la Table des vingt Compagnies anglaises; mais ce travail nécessiterait un assez long dépouillement, parce que les cadres n'en sont pas préparés. Les âges sont bien déclarés par années, tant au recensement qu'au moment des décès; mais ces déclarations ne sont jusqu'à présent dépouillées et transmises au Bureau de la Statistique que de la manière suivante : pour les décès, de 0 à 1 an, puis de 1 à 5 ans, puis par périodes de 5 ans; pour le dénombrement, d'année en année jusqu'à 25 ans, et ensuite par périodes de 5 ans. Il serait à désirer qu'après le prochain recensement, qui aura lieu en 1877, on prît la peine de faire tous les dépouillements d'année en année. On pourra toujours remédier à l'inexactitude des déclarations en employant une méthode d'ajustement raisonnée.

109. D'après l'examen du tableau qui précède, on voit que la variation des taux de mortalité, pour l'ensemble de la population française, peut se résumer comme suit :

La mortalité est de 22 pour 100 pour la première année; de 1 à 5 ans elle n'est déjà plus que de $3\frac{1}{2}$ pour 100, et elle décroît encore jusqu'à 10 et 15 ans, âges entre lesquels elle descend à $\frac{1}{2}$ pour 100. Elle se relève ensuite, quoique lentement, jusqu'à 25 ans, pour éprouver un temps d'arrêt jusque vers 40 ans; mais, à partir de cet âge, la mortalité croît sans cesse, d'abord insensiblement jusqu'à 55 ans, âge auquel elle dépasse 2 pour 100, puis très-rapidement jusqu'à 100 ans, âge que l'on peut considérer comme la limite de l'existence humaine.

Plus simplement encore, on peut distinguer dans la vie des habitants de la France trois périodes : l'enfance et l'adolescence, qui durent jusqu'à 18 ans pour le sexe masculin et jusqu'à 15 ans pour le sexe féminin, et où il se produit par an, en moyenne, 2,95 décès pour 100 habitants; l'âge adulte, qui dure jusqu'à 60 ans, avec 1,11 décès annuels en moyenne;

et la vieillesse, avec 6,82 décès annuels moyens pour 100 habitants.

110. Comme les décès sont très-considérables pendant la première année de la vie, on a divisé cette année en six périodes inégales qui ont donné les résultats suivants :

AGES.	DÉCÈS sur 100493 enfants nés vivants.	NOMBRES proportionnels de décès, sur 100 décès arrivés pendant la première année.
De la naissance à 7 jours	26736	15
De 8 à 15 jours	21764	12
De 15 jours à 1 mois	23213	12
De 1 à 3 mois	35118	20
De 3 à 6 mois	30681	17
De 6 mois à 1 an	42668	24
TOTAUX	180180	100

111. La Table de mortalité de la population générale de la France, telle qu'elle est publiée par le Ministère de l'Agriculture et du Commerce, ne donne les nombres des vivants que de 5 en 5 ans, aux âges de 5, 10, 15 ans, etc., et les taux de mortalité également de 5 en 5 ans, aux âges moyens de $7\frac{1}{2}$ ans, $12\frac{1}{2}$ ans, $17\frac{1}{2}$ ans, etc. Si l'on voulait obtenir les âges et les taux d'année en année, il faudrait faire une interpolation partielle dans chaque période quinquennale; cette interpolation pourrait se faire avec une grande exactitude par la formule de Gompertz (*voir*, au n° **119**, l'explication de cette formule).

Pour donner un exemple de ce calcul, nous supposerons que l'on veuille faire l'interpolation entre les âges de 30 et de 35 ans. Les données résultant de la Table sont les sui-

vantes :

l_{30} = le nombre des vivants à 30 ans = 57 376.
l_{35} = » » 35 ans = 54 856.
Taux de mortalité à $27\frac{1}{2}$ ans = 0,00 879.
» à $32\frac{1}{2}$ ans = 0,00 898.
» à $37\frac{1}{2}$ ans = 0,00 924.

La formule de Gompertz donne, pour le nombre des vivants,

$$y = dg^{q^x},$$

d et g étant deux constantes à déterminer, q étant la raison de la progression suivant laquelle s'accroît le taux de mortalité et x étant l'âge compté à partir de 30 ans.

On tire directement des données

$$dg^{q^{2,5}} = 57376,$$
$$dg^{q^{7,5}} = 54856,$$
$$q = \sqrt[5]{\frac{0,00898}{0,00879}};$$

d'où l'on conclut

$$q = 1,0043,$$
$$g = 0,12802,$$
$$d = 458180.$$

La formule à appliquer est donc

$$y = 458180 \times 0,12802^{1,0043^x};$$

et il suffit d'y faire x égal à 1, 2, 3 et 4 pour avoir le nombre des vivants à 31, 32, 33 et 34 ans. Ces nombres sont les suivants :

$$y_{31} = 58865,$$
$$y_{32} = 56358,$$
$$y_{33} = 55855,$$
$$y_{34} = 55353.$$

On pourrait interpoler la Table tout entière de la même manière, en calculant de nouvelles valeurs de d, g et q pour chaque intervalle de 5 ans, et l'on obtiendrait une Table complète donnant les nombres de vivants d'année en année ; mais les documents originaux qui ont servi de base à la Table publiée ne nous paraissent ni assez complets, ni assez exempts d'erreurs, ni assez bien coordonnés entre eux pour qu'un travail de ce genre présente un intérêt sérieux. Nous nous bornons en conséquence à reproduire à la fin du volume la Table du nombre des vivants et la Table des taux de mortalité, telles qu'elles ont été publiées par le Ministère.

112. Pour les Tables de mortalité dressées sur des ensembles de population, il n'est pas possible de déterminer mathématiquement le degré d'approximation probable; car tous les individus qui composent une couche de population du même âge n'ont pas la même probabilité de décès, parce que cette couche n'a pas été rendue homogène, comme cela arrive quand on ne s'occupe que de têtes choisies. Ce que l'on obtient pour le taux de mortalité à 30 ans, par exemple, c'est une sorte de moyenne entre le taux applicable aux gens bien portants et aux gens malades ou exposés à des risques spéciaux. Si l'on veut, à l'aide de ces Tables, évaluer la probabilité de décès d'un homme de 30 ans que l'on connaît, il faut estimer, par les lumières du simple bon sens, si cet homme se trouve dans des conditions meilleures ou pires que la moyenne des habitants du pays où la Table de mortalité a été faite, et diminuer ou augmenter en conséquence le taux de mortalité général, qui a été obtenu pour la masse.

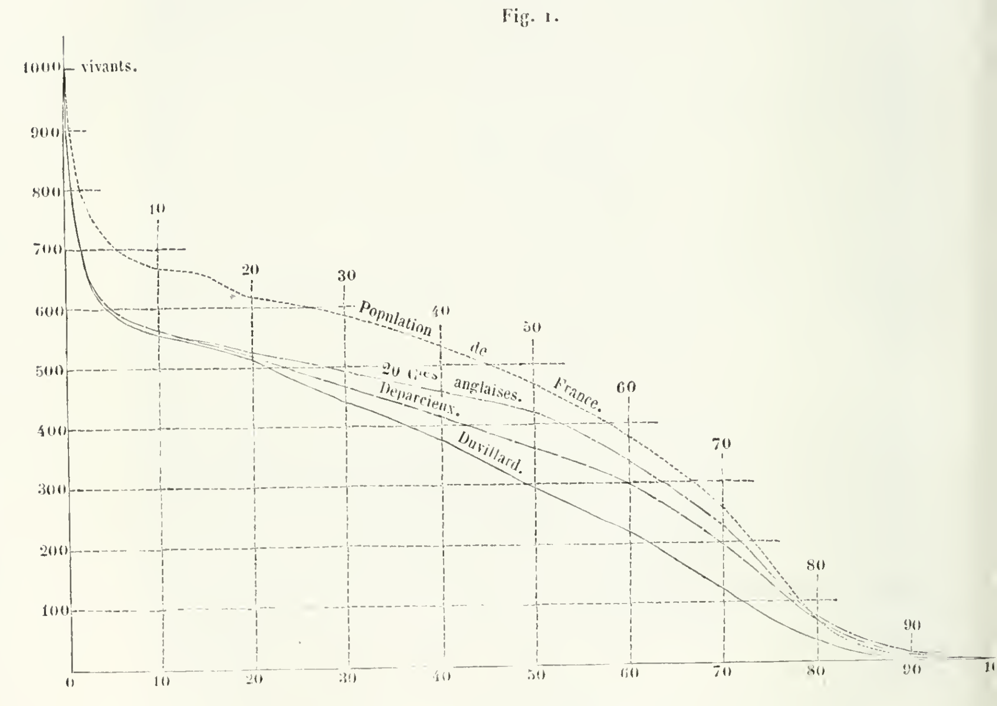
CHAPITRE VII.

COURBES ET ÉQUATIONS DE MORTALITÉ.

§ I. — *Courbes de mortalité.*

113. Les Tables de mortalité peuvent se représenter par des courbes, dans lesquelles on prend pour abscisses les âges et pour ordonnées les nombres de vivants, et qui prennent le

Fig. 1.



Courbes indiquant le nombre des vivants par âges d'après différentes Tables de mortalité.

nom de courbes de mortalité. On rend ainsi leurs résultats plus sensibles à l'œil. Nous donnons dans la *fig.* 1 les

courbes de mortalité correspondant aux quatre Tables les plus intéressantes pour la France, savoir : la Table de Duvillard, celle de Deparcieux, la Table H^M des vingt Compagnies anglaises ajustée, et celle de la population générale de la France. Dans ces courbes, l'inclinaison de la tangente en un point donné, c'est-à-dire la tangente de l'angle qu'elle fait avec l'axe horizontal, représente le nombre absolu des décès à l'âge qui correspond au point de tangence. La portion de l'axe horizontal comprise entre le pied de l'ordonnée et le point où la tangente coupe cet axe représente l'inverse du taux de mortalité à l'âge correspondant.

114. La courbe de Duvillard et celle de la population générale de la France partent toutes deux d'un nombre rond de 100 000 vivants à la naissance. Celle de Deparcieux part, à 3 ans, de 62 467, nombre qui est celui des survivants d'après Duvillard; et la Table anglaise part, à 10 ans, de 54 971, nombre des survivants qui, d'après Deparcieux, resteraient, à l'âge de 10 ans, sur un groupe formé de 62 467 têtes à 3 ans.

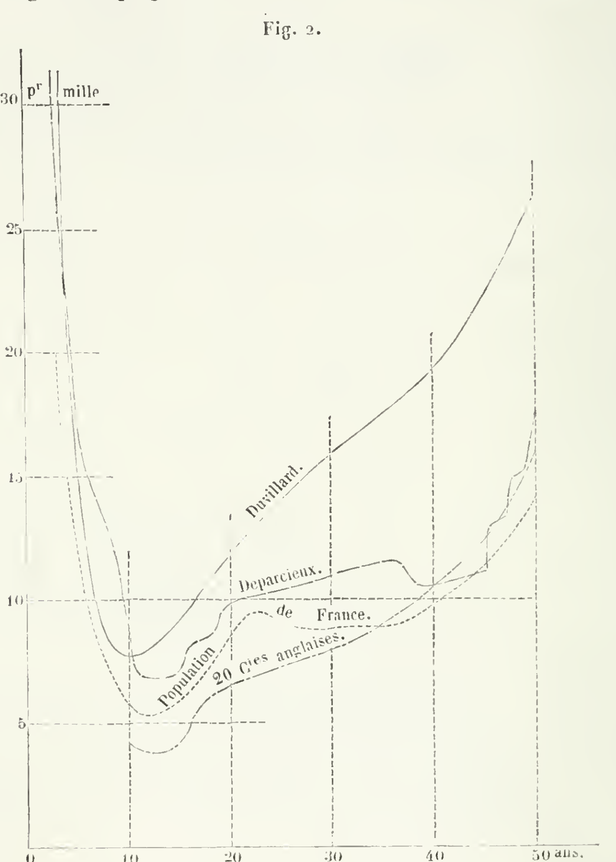
De ces quatre courbes, représentant aux yeux quatre Tables de mortalité, c'est celle de Duvillard qui donne la diminution la plus rapide dans le nombre des vivants, et c'est celle des vingt Compagnies anglaises qui donne la diminution la moins rapide.

La Table de la population de la France se comporte à peu près comme celle de Deparcieux, c'est-à-dire que la mortalité générale de la population est à peu près aujourd'hui ce qu'était, il y a 125 ans, celle d'une classe d'individus bien constitués et bien portants, comme le sont les associés tontiniers.

115. On peut aussi tracer la courbe des taux de mortalité aux divers âges : on prend alors pour abscisses les âges, et pour ordonnées les taux de mortalité, et il y a autant de courbes différentes de ce genre qu'il y a de Tables de mortalité. Nous donnons dans la *fig.* 2 les courbes des taux de mortalité pour les quatre Tables énumérées ci-dessus,

de la naissance à l'âge de 50 ans; et dans la *fig.* 3 les mêmes courbes à une plus petite échelle, de 50 à 100 ans. Cependant, dans cette dernière figure, la courbe de la population générale de France n'a pas été tracée, parce qu'à une aussi petite échelle elle se confond avec celle de Deparcieux et des vingt Compagnies.

Fig. 2.

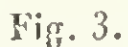


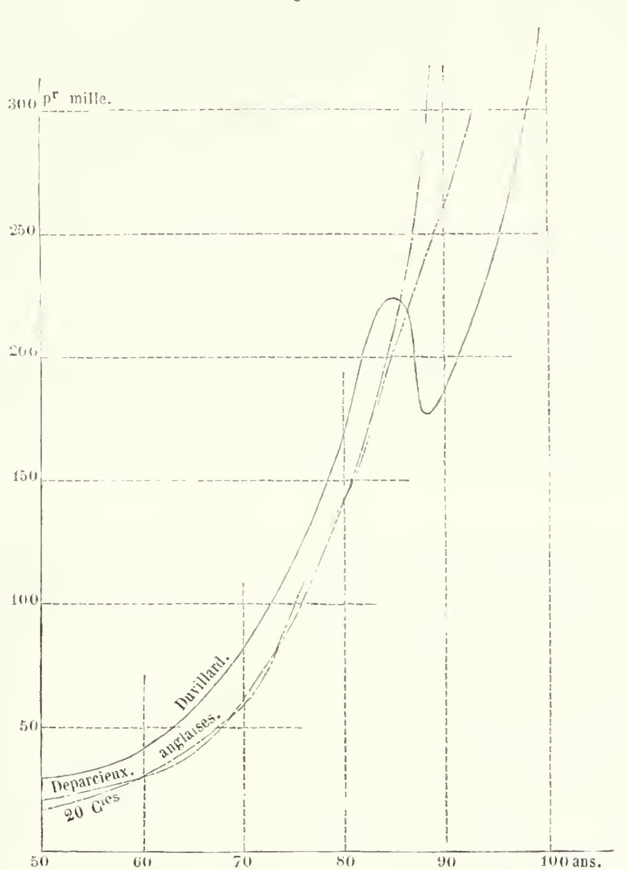
Courbes indiquant les taux de mortalité par âges suivant différentes Tables de mortalité.

116. C'est au moyen de ces courbes des taux de mortalité que l'on peut le plus utilement comparer les diverses Tables entre elles. Voici les résultats sommaires de cette comparaison.

Les taux de la Table HM diminuent légèrement depuis 10

jusqu'à 13 ans, et augmentent ensuite progressivement depuis 13 ans jusqu'à la fin de la vie : sauf une partie presque constante entre 21 et 27 ans, la progression est régulière et assez faible jusqu'à 55 ans environ, et elle devient rapide à partir de l'âge de 65 ans.


Fig. 3.



Courbes indiquant les taux de mortalité par âges suivant différentes Tables de mortalité.

Les taux de la Table de Duvillard sont supérieurs aux taux de la Table anglaise, et ils sont presque doubles depuis la naissance jusqu'à 50 ans ; la différence proportionnelle di-

minue de 50 à 86 ans. Les taux de Duvillard diminuent brusquement de 85 à 88 ans, et deviennent à 87 ans, ainsi que dans toute la fin de l'existence, notablement inférieurs à ceux de la Table anglaise.

Les taux de la Table de Deparcieux se tiennent entre les deux jusqu'à l'âge de 60 ans; de 60 à 78 ans ils deviennent inférieurs, même à ceux de la Table anglaise, et ils les dépassent de nouveau à 79 ans; à 86 ans ils dépassent également, et pour tout le reste de la vie, les taux de Duvillard.

La diminution brusque qui se fait sentir dans les taux de mortalité de la Table de Duvillard à partir de 85 ans doit provenir de ce que les observations de cet auteur ont porté, dans les âges avancés, sur un nombre de têtes trop peu considérable, de sorte qu'à partir de 80 ans on ne peut plus reconnaître aucune autorité à son travail.

Les taux de la population générale de la France sont partout moins élevés que ceux de Deparcieux : depuis 10 ans jusqu'à 35 ans, ils sont supérieurs aux taux de la Table anglaise; mais, à partir de 35 ans, ils leur deviennent inférieurs jusque vers 75 ans.

117. On peut s'étonner de voir que, pendant toute la période de l'âge mûr, de 35 à 75 ans, les taux de mortalité obtenus pour la population générale de la France soient plus faibles que les taux de la Table anglaise, puisque la population générale comprend les malades, les gens mal constitués, les individus soumis à des risques exceptionnels, tandis que la Table anglaise ne s'applique qu'à des assurés qui sont généralement réputés jouir d'un état de santé plus satisfaisant que la moyenne. Reportons-nous au n° **106**, et voyons quelles sont les causes d'erreur qui auraient pu faire obtenir, à ces âges, des taux trop faibles pour la mortalité de la population de la France. Ces causes sont les suivantes :

1° La population peut être plus forte, à l'époque du recensement, qu'elle n'est en moyenne pendant l'année. Cela ne doit arriver que dans une faible proportion; car le recense-

ment a lieu au mois de mai, et l'on n'y inscrit pas les étrangers qui se trouvent alors en voyage en France.

2° Certains individus pourraient être inscrits deux fois dans un même recensement. Ceci doit arriver très-rarement; ce serait plutôt l'erreur inverse qui aurait tendance à se produire.

3° Les âges déclarés au recensement pourraient être plus élevés que les âges réels; il semble encore que c'est plutôt l'effet inverse qui aurait tendance à se produire.

4° Certains décès pourraient être omis; ce cas doit être très-rare, à cause de la grande régularité avec laquelle se font les déclarations de décès. Il y aurait plutôt une erreur en sens contraire, puisqu'on compte les décès en France des étrangers en voyage, tandis qu'on ne compte pas ces voyageurs dans le recensement.

5° Les âges déclarés au décès pourraient être moins élevés que la réalité. On ne voit aucune raison pour que cela se produise d'une manière générale, et l'erreur qui pourrait en résulter doit être au moins contre-balancée par les déclarations d'âges moins élevés, qui peuvent être faites pour les vivants, au moment du recensement.

Ainsi l'on ne voit aucune raison pour que les taux de mortalité obtenus pour la population de la France, au moins dans cette période de la vie, soient moins élevés que la réalité. Il reste donc bien établi que les individus assurés en cas de décès, et âgés de 30 à 55 ans, sont, à âge égal, soumis en moyenne à une mortalité plus forte que l'ensemble de la population d'un grand pays. C'est le résultat de l'anti-sélection naturelle que nous avons signalée au n° 86.

Si, par exemple, on fait le dépouillement de tous les assurés âgés de 40 ans, sur lesquels ont porté les observations de la Table anglaise, on reconnaît qu'ils sont déjà assurés en moyenne depuis six ans trois mois; après ce laps de temps, non-seulement tout le bénéfice de la sélection médicale a disparu, mais, comme le prouve le rapprochement ci-dessus, les risques restant en cours sont devenus plus mauvais que ne le

serait l'ensemble de la population. Des résultats analogues se produisent pour toute la période d'âge de 30 à 55 ans.

Il est si vrai que cette différence de mortalité est le résultat de l'anti-sélection des risques, que, si l'on étudie un âge pour lequel l'anti-sélection n'ait pas eu le temps de se produire, on trouve, en même temps, que la mortalité de la Table anglaise reste, pour cet âge, en dessous de la mortalité de la population générale. Ainsi, par exemple, on constate que les assurés âgés de 25 ans, sur lesquels ont porté les observations, n'étaient assurés en moyenne que depuis deux ans trois mois; après ce laps de temps, le bénéfice de la sélection médicale n'est pas encore perdu; et en effet, à 25 ans, le taux de mortalité de la Table anglaise est notablement plus faible que celui de l'ensemble de la population.

Ce résultat, sur lequel nous aurons à revenir, est de nature à mériter toute l'attention des Compagnies d'assurances sur la vie.

§ II. — Équations de mortalité.

118. On sait qu'en Géométrie analytique les courbes peuvent se représenter par des équations. Il était donc naturel, après avoir tracé les courbes de mortalité d'après les données de l'expérience, de chercher s'il n'y aurait pas quelque formule algébrique plus ou moins simple qui donnât leur équation.

Cette recherche n'est pas une simple curiosité; car, même quand on possède une Table exacte, il serait fort utile, pour divers problèmes d'assurances, ainsi que nous le verrons plus loin, de pouvoir la représenter par une formule algébrique, ne serait-ce même que pour une période limitée de l'existence.

On peut remarquer d'abord que, si l'on avait trouvé la formule du nombre des vivants par âges, c'est-à-dire la formule de la première des deux courbes que nous avons représentées, celle de la seconde courbe ou des taux de mortalité s'en dé-

duirait immédiatement par dérivation. Si, en effet, $y = f(x)$ représente le nombre des vivants à l'âge x, le taux de mortalité à cet âge est égal à $-\frac{dy}{ydx}$ ou à $-\frac{f'(x)}{f(x)}$, ce qui donne

$$y = -\frac{f'(x)}{f(x)}$$

pour la formule de la seconde courbe.

Si le taux de mortalité était constant à tout âge, on obtiendrait l'équation cherchée en posant d'abord celle qui exprime cette propriété

$$-\frac{dy}{ydx} = a,$$

puis intégrant, ce qui donnerait

$$y = \frac{b}{c^x},$$

b et c étant deux constantes.

Si le taux de mortalité était proportionnel à l'âge, il suffirait encore d'exprimer cette propriété pour en déduire l'équation cherchée. On aurait en effet

$$-\frac{dy}{ydx} = ax \quad \text{et} \quad y = \frac{c}{dx^2},$$

c et d étant deux constantes à déterminer.

Ainsi, toute hypothèse faite sur la loi des taux de mortalité conduit à trouver par une intégration une formule du nombre des vivants. Il faut ensuite vérifier si les résultats de cette formule concordent avec les données de l'expérience. Les deux formules ci-dessus ne donnent qu'une grossière approximation, et encore pendant une portion limitée de la vie. M. Gompertz, actuaire anglais, en a posé une autre, qui dérive également d'une certaine hypothèse faite sur la loi des taux de mortalité. La formule de M. Gompertz représente assez bien, sous certaines conditions, la courbe de mortalité; sa démonstration a été insérée dans les *Philosophical Transactions* de 1825, et rapportée dans le volume IX (1861) du *Journal des Actuaires anglais*. Il faut la connaître, ne serait-ce qu'à

titre de curiosité, car elle a acquis en cette matière une sorte de célébrité; nous la donnerons donc ici.

119. *Formule de Gompertz.* — M. Gompertz part de cette hypothèse qu'entre deux âges déterminés le taux de mortalité augmente en progression géométrique, c'est-à-dire que, si on le représente par a pour un certain âge et par aq pour l'âge suivant (après une année écoulée), il sera aq^x après x années écoulées. Comme le taux de mortalité à l'âge x est représenté, ainsi que nous l'avons vu, par $-\frac{dy}{ydx}$, cette hypothèse donne lieu à l'équation suivante :

$$-\frac{dy}{ydx} = aq^x,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{y} = -aq^x dx$$

et, par intégration,

$$\text{lognép}\, y = -aq^x + c,$$

$$y = e^{-aq^x+c} = e^c e^{-aq^x},$$

soit

(25) $$y = d(g)^{q^x},$$

d et g étant deux constantes à déterminer, et q étant la raison de la progression géométrique, suivant laquelle le taux de mortalité augmente d'année en année. On dispose de ces trois constantes, et, étant donnée une Table de mortalité, on détermine leurs valeurs numériques, de manière à faire concorder le mieux et le plus longtemps possible les nombres de vivants donnés par la formule avec les nombres de vivants donnés par l'observation.

120. Cherchons, par exemple, à adapter la formule de Gompertz à la Table de mortalité H^M; nous prendrons d'abord pour déterminants trois âges équidistants et embrassant une grande partie de l'existence adulte : 15 ans, 30 ans et 45 ans.

L'équation (25) donne, en prenant les logarithmes des deux membres,

$$\log y = \log l_x = \log d + q^x \log g.$$

Substituant pour l_x les nombres que l'on trouve dans la Table H^M, on obtient les trois égalités suivantes :

$$\log l_{15} = 4,992218 = \log d + q^{15} \log g,$$
$$\log l_{30} = 4,953591 = \log d + q^{30} \log g,$$
$$\log l_{45} = 4,891643 = \log d + q^{45} \log g;$$

d'où, en prenant les différences de l'une à l'autre,

$$0,038627 = q^{15}(1 - q^{15}) \log g,$$
$$0,061948 = q^{30}(1 - q^{15}) \log g;$$

et, divisant membre à membre,

$$q^{15} = \frac{61948}{38627},$$
$$\log q^{15} = 0,2051363.$$

Avant d'aller plus loin, il est bon de contrôler cette valeur en prenant pour déterminants trois autres âges, 22, 37 et 52 ans. On trouve alors, par des calculs identiques,

$$\log q^{15} = 0,2125132.$$

On peut admettre, pour la valeur la plus convenable à adopter, la moyenne arithmétique de ces deux résultats, ce qui donne

$$\log q^{15} = 0,2088247,$$
$$\log q = 0,0139216,$$
$$q = 1,03257;$$

et l'on déduit facilement des équations qui précèdent les valeurs des deux autres constantes

$$\log g = \bar{1},9613207, \quad g = 0,91479,$$
$$\log d = 5,054779, \quad d = 113444.$$

La formule de Gompertz, adaptée à la Table H^M, est ainsi la suivante :

$$l_x = 113444 \times (0.91479)^{1,03257^x}.$$

Si l'on veut vérifier avec quel degré d'approximation elle donne les nombres des vivants aux divers âges, il suffit d'y faire, par exemple, $x = 40$ et l'on trouve

$$l_{40} = 82291.$$

Le nombre inscrit dans la Table est 82284; il n'y a donc qu'une différence de 7 vivants, différence qui est insignifiante, et qui se confond, soit avec les erreurs d'observations, soit avec les écarts amenés par l'ajustement des Tables originales.

La formule de Gompertz, quelles que soient les valeurs données à ses constantes, ne peut jamais reproduire les nombres de la Table de mortalité avec une exactitude mathématique; ainsi il serait impossible d'obtenir $y = 0$, même pour un âge x égal à 100, ou à la limite supérieure de la Table; car l'expression dg^{q^x} pourra bien devenir très-petite pour x très-grand, mais jamais nulle. Cela tient à l'hypothèse même : le taux de mortalité est supposé augmenter en progression géométrique; il ne deviendra donc jamais égal à 1, tandis que, dans la réalité, le taux est toujours égal à 1 pendant la dernière année de la vie, puisque alors tous les vivants disparaissent; mais il ne peut être question ici que d'approximations; et, quand on aura remplacé d, g et q par des valeurs numériques raisonnablement calculées, il arrivera toujours que l'expression $dg^{q^{100}}$ présentera une valeur, sinon nulle, du moins assez petite pour être négligée.

Cette formule s'appliquera, soit pendant toute la durée de la vie, soit entre deux limites d'âges quelconques, pourvu qu'entre ces deux limites l'hypothèse admise se vérifie, c'est-à-dire pourvu que le taux de mortalité augmente d'année en année en progression géométrique. C'est là ce qui reste à vérifier, en s'appuyant sur les résultats numériques originaux, donnés par les Tables de mortalité.

121. M. Gompertz dit à ce sujet que son hypothèse se vérifie en effet pendant une longue période de la vie humaine,

mais pas cependant pendant toute la vie. M. Edmonds, qui s'est occupé après lui de la même étude, annonce que, d'après ses observations, on peut diviser la vie humaine en trois périodes, dans chacune desquelles le taux de mortalité augmente en progression géométrique; la raison de ces progressions change seulement d'une période à l'autre. D'après M. Edmonds, cette loi serait absolue, pour toute population et dans toute circonstance. Il suivrait de là que la formule de Gompertz pourrait s'appliquer à toute la durée de la vie humaine, en la divisant seulement en trois périodes.

Ces trois périodes de la vie humaine, présentant cette propriété d'une progression régulière des taux de mortalité, avaient déjà été annoncées comme telles par le D[r] Price, en 1769. D'après M. Edmonds, la première est l'enfance, qui dure jusqu'à 9 ans, et la raison de la progression, qui est désignée ci-dessus par q, y est égale à $\frac{1}{1,479108}$; la seconde est l'âge mûr, qui dure de 9 à 55 ans, et la valeur de q y est égale à 1,0297117; la troisième est la vieillesse, de 55 ans à la fin de la vie, et la valeur de q y est égale à 1,0796923. La règle posée par cet auteur est évidemment trop absolue; les lois naturelles ne peuvent pas s'enfermer dans un cadre aussi rigide. Tout ce qu'on peut dire, c'est qu'elle est assez approchée de la réalité; mais les valeurs de q, qui pouvaient être exactes lorsque M. Edmonds cherchait à les adapter à la mortalité générale de la population anglaise (*Journal des Actuaires anglais*, t. IX, 1861), ne seraient plus aujourd'hui les mêmes, si on voulait les adapter à la Table des vingt Compagnies ou à toute autre. Tout au moins faudrait-il modifier les limites d'âges des trois périodes et les valeurs numériques indiquées par M. Edmonds.

122. La formule de Gompertz jouit d'une propriété remarquable. Lorsqu'on veut calculer les annuités viagères (continues ou ordinaires) sur une ou sur deux têtes (*voir* plus loin, Chapitre IX), on arrive à une somme que l'on ne peut évaluer

qu'en admettant une équation déterminée pour représenter la loi de mortalité. Si l'on admet que cette équation soit l'équation (25), qui résulte de l'hypothèse de Gompertz, on reconnaît que, étant données deux ou plusieurs têtes d'âges quelconques, on peut les remplacer par une seule d'un âge convenablement choisi, et qu'après ce remplacement il reste constamment les mêmes chances pour le décès de l'une des têtes primitivement données (c'est-à-dire pour la dissolution de leur groupe) que pour le décès de la nouvelle tête choisie; en d'autres termes, l'annuité viagère sur deux ou plusieurs têtes a la même valeur que l'annuité sur la tête isolée. Ceci a été démontré pour la première fois par M. de Morgan, dans le *Philosophical Magazine* de novembre 1839; la démonstration est résumée dans le tome XV du *Journal des Actuaires anglais* (p. 399). Il en résulte que la formule de Gompertz a pour propriété de permettre de ramener la recherche des annuités sur deux ou plusieurs têtes aux annuités sur une seule. Cette propriété est précieuse, parce que le calcul direct d'annuités sur deux et trois têtes est extrêmement long et fastidieux, tandis qu'on a toujours à sa disposition, pour la Table de mortalité que l'on a adoptée, des Tables toutes calculées et en tous cas faciles à établir, donnant les annuités sur une seule tête.

On a donc été conduit à reprendre la question en sens opposé, c'est-à-dire à chercher quelle est la loi de mortalité qui jouit de cette propriété que les annuités sur deux têtes peuvent se remplacer par des annuités sur une seule tête, d'un âge convenablement choisi. Le calcul ramène précisément à la formule de Gompertz, ce qui prouve qu'elle est la seule qui jouisse de cette propriété.

Cette démonstration a été donnée par M. de Morgan, dans le *Journal des Actuaires anglais* (t. X); elle est également établie, et d'une manière différente, dans le Traité de M. Laurent (page 196).

123. *Formule de Makeham.* — M. Makeham a proposé une

modification à la formule de Gompertz. Au lieu de représenter la loi de variation des taux de mortalité par aq^x, il ajoute une constante, et la représente par $b + aq^x$.

Procédant alors comme au n° 119, cette hypothèse donne lieu à l'équation suivante :

$$-\frac{dy}{y\,dx} = b + aq^x,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{y} = -b\,dx - aq^x\,dx$$

et par l'intégration

$$\log \text{nép}\, y = -bx - aq^x + c$$

$$y = e^{c-bx-aq^x} = \frac{e^c}{(e^b)^x}\, e^{-aq^x}.$$

Soit

(26) $$y = \frac{k}{a^x}(g)^{q^x},$$

k, a, g et q étant quatre constantes à déterminer; le nombre des vivants est donc ici exprimé par une formule qui contient quatre constantes au lieu de trois; cette formule peut être considérée comme représentant la loi de la mortalité humaine avec une exactitude suffisante, jusqu'à 70 ans au moins. On dispose des quatre constantes, et, étant donnée une Table de mortalité, on détermine leurs valeurs numériques de manière à égaler autant que possible, et pour la plus grande étendue possible, les nombres de vivants donnés par la formule avec les nombres de vivants donnés par la Table.

Pour déterminer les quatre constantes k, a, g et q, pour une Table de mortalité quelconque, il suffit de prendre dans cette Table les nombres de vivants à quatre âges distincts; il est bon de choisir ces quatre âges équidistants et aussi éloignés que possible. En prenant les logarithmes des deux membres dans l'équation (26), le calcul s'établit très-simplement de la manière suivante (nous supposons qu'on se sert de la

Table H^{MF} et qu'on prend pour déterminants les âges de 20, 40, 60 et 80 ans) :

(27) $$\log y = \log l_x = \log k - x \log a + q^x \log g.$$

(28) $$\begin{cases} 4,9805215 = \log k - 20 \log a + q^{20} \log g, \\ 4,9102294 = \log k - 40 \log a + q^{40} \log g, \\ 4,7662120 = \log k - 60 \log a + q^{60} \log g, \\ 4,1522272 = \log k - 80 \log a + q^{80} \log g. \end{cases}$$

Prenant deux à deux les différences des équations (28),

(29) $$\begin{cases} 0,0702921 = 20 \log a + q^{20} (q^{20} - 1) \log g, \\ 0,1440174 = 20 \log a + q^{40} (q^{20} - 1) \log g, \\ 0,6139848 = 20 \log a + q^{60} (q^{20} - 1) \log g. \end{cases}$$

Prenant encore deux à deux les différences des équations (29),

(30) $$\begin{cases} 0,0737253 = q^{20} (q^{20} - 1)^2 \log g, \\ 0,4699674 = q^{40} (q^{20} - 1)^2 \log g. \end{cases}$$

Divisant enfin les deux équations (30) l'une par l'autre,

$$\frac{4699674}{737253} = q^{20},$$

d'où l'on tire par logarithmes

(31) $$\log q = 0,0402225.$$

On pourrait adopter pour q cette valeur, sans autre correction. M. Woolhouse, dans le tome XV du *Journal des Actuaires anglais*, croit cependant devoir rechercher une plus grande approximation; il recommence les mêmes calculs en prenant pour déterminants quatre âges intermédiaires, 30, 50, 70 et 90 ans, et il arrive ainsi à une nouvelle valeur

(32) $$\log q = 0,0395573.$$

Avec les deux valeurs de q tirées des équations (31) et (32), il calcule deux séries différentes de coefficients numériques pour la formule de Makeham, et deux séries de valeurs indiquant les nombres, théoriquement calculés, des

vivants aux différents âges. Il s'arrête enfin pour $\log q$ à une sorte de moyenne prise entre les valeurs (31) et (32), et établie de telle manière que les écarts entre les nombres de vivants résultant de l'application de la formule et les nombres résultant de l'observation soient le moins grands possible.

Ayant adopté une valeur pour $\log q$, il en déduit facilement, au moyen des équations (30), (29) et (28), les valeurs correspondantes de g, de a et de k. Ces valeurs, qu'il adopte définitivement comme convenant à la Table H^{MF}, sont les suivantes :

$$\log k = 5{,}0411939,$$
$$\log a = 0{,}0028634,$$
$$\log g = -0{,}0004121 = \bar{1}{,}9995879,$$
$$\log q = 0{,}04.$$

On peut en conclure

$$k = 109949,$$
$$a = 1{,}006615,$$
$$g = 0{,}999052,$$
$$q = 1{,}09648.$$

La formule de Makeham, pour la Table H^{MF}, est donc

$$l_x = \frac{109949}{1{,}006615^x}(0{,}999052)^{1{,}09648^x}.$$

124. M. Gompertz s'était basé, pour adopter son hypothèse, sur la considération physiologique suivante : on peut admettre que la force de mortalité qui assiége tout homme s'augmente, dans un temps infiniment petit, d'une fraction toujours constante de sa propre valeur. C'est une hypothèse physiologique, à laquelle il n'attachait cependant pas une valeur absolue, car il disait lui-même, dans son premier Mémoire : « On pourrait admettre que la mort peut être le résultat de deux causes générales indépendantes : l'une consisterait dans le hasard, dans les accidents qui peuvent priver de la vie une personne encore en parfaite santé; l'autre est la vieillesse, qui affaiblit graduellement tout individu et le rend

de moins en moins capable de résister aux forces destructives. » C'est cet aperçu lumineux, dont Gompertz n'avait pas voulu faire la base de ses calculs, qui a été repris et traduit en formule algébrique par M. Makeham. M. Makeham est arrivé ainsi à plus d'exactitude; mais il n'a pu le faire qu'en adoptant une formule moins élégante, plus compliquée et plus difficile à manier dans les recherches.

Il considère la force de mortalité comme se composant de deux éléments : l'un, qui se comporte absolument comme celui qu'a adopté M. Gompertz et qui varie par conséquent avec l'âge, l'autre qui est fixe et qui représente la part du hasard, des accidents indépendants de l'âge : c'est ce qui justifie l'addition d'une constante. De telles considérations physiologiques, faites *a priori*, peuvent avoir leur utilité pour guider les tâtonnements ; mais il ne faut pas s'exagérer leur valeur, et l'on est toujours obligé de comparer les résultats auxquels elles conduisent avec les données originales fournies par les statistiques mortuaires.

125. La formule de Makeham jouit d'une propriété analogue à celle de Gompertz et qui a été démontrée par son auteur (*Actuaires anglais*, t. IX, p. 361). Si on l'adopte comme représentant la loi de mortalité, on peut, pour le calcul des annuités viagères (continues ou ordinaires) sur deux ou plusieurs têtes d'âges quelconques, remplacer ces têtes par deux ou plusieurs autres ayant toutes le même âge, en choisissant convenablement cet âge commun. Au lieu d'avoir à calculer des Tables d'annuités sur deux têtes d'âges différents, ce qui suppose deux éléments variables, on n'aura donc à calculer que des Tables sur deux têtes de même âge, ce qui ne laisse qu'un élément variable et conduit à des calculs beaucoup plus simples, quoiqu'un peu moins simples eux-mêmes que ceux qui résultent de l'adoption de l'hypothèse de Gompertz.

Réciproquement, si l'on cherche une loi de mortalité pour laquelle les annuités sur deux têtes jouissent des propriétés ci-dessus exposées, on retombe précisément sur la formule de

Makeham, ce qui prouve qu'elle est la seule qui satisfasse à cette condition.

§ III. — *Vie probable.* — *Vie moyenne.*

126. On appelle *vie probable*, à un âge quelconque et d'après une Table de mortalité déterminée, la différence qui existe entre cet âge et l'âge auquel le nombre des vivants est réduit à moitié. Ainsi, dans la Table de mortalité de Deparcieux, le nombre des vivants à 30 ans est 734 et ce nombre est réduit à 380 à 66 ans et à 364 à 67 ans; la vie probable à 30 ans est donc de 36 ans et 10 mois. Dans cette Table, la vie probable est de 42 ans à la naissance; elle augmente jusqu'à 3 ans, âge auquel elle est de 55 ans et 4 mois, et elle diminue ensuite constamment d'année en année.

127. *Vie moyenne.* — Si l'on considère un groupe de vivants du même âge et qu'on les suive pendant toute leur existence, en supposant qu'ils décèdent exactement suivant la loi indiquée par une Table de mortalité, la somme des années de vie dont ils auront joui à eux tous forme la vie totale du groupe en question; et, en divisant cette somme par le nombre des individus qui composaient ce groupe à son origine, on obtient ce qu'on appelle la *vie moyenne* de chacun de ces individus. Comme on peut supposer que tous ceux qui meurent dans la première année ont vécu une demi-année, la vie totale du groupe, après un an écoulé, sera

$$l_{x+1} + \frac{l_x - l_{x+1}}{2} = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}.$$

La deuxième année fournira, de même, $\frac{l_{x+1} + l_{x+2}}{2}$ années de vie, et ainsi de suite; de sorte que, en ajoutant tous ces éléments et divisant par l_x, on voit que la vie moyenne à l'âge x est représentée par la formule

$$\frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots + l_{100}}{l_x} + \frac{1}{2}, \tag{33}$$

la limite de la vie étant supposée de 100 années.

Dans la Table de Deparcieux, la vie moyenne est de 39 ans 8 mois à la naissance; elle augmente jusqu'à l'âge de 4 ans, où elle atteint 49 ans 4 mois, et elle diminue ensuite progressivement d'année en année. A 30 ans, elle est de 34 ans 1 mois, tandis que la vie probable était 36 ans 10 mois.

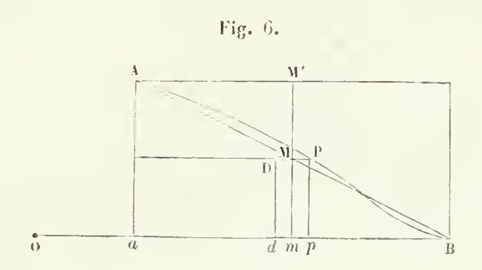
128. La vie moyenne ne peut pas être égale à la vie probable, ni avoir avec elle aucun rapport fixe; car tous les décès qui arrivent après l'époque où le nombre initial des vivants que l'on considère a été réduit à moitié n'ont plus aucune influence sur le chiffre de la vie probable, tandis qu'ils contribuent, pour leur part, à former le chiffre qui représente la vie moyenne.

La vie probable et la vie moyenne seraient toujours égales si le nombre des décès était constant à tous les âges; la vie probable serait constamment la plus grande si le nombre absolu des décès par âges allait toujours en augmentant; elle serait constamment la plus courte si ce nombre allait toujours en diminuant. En réalité, les nombres absolus des décès varient irrégulièrement suivant les âges, de sorte que la relation entre la vie moyenne et la vie probable est elle-même irrégulière et varie d'une Table de mortalité à une autre. Dans la Table de Deparcieux, la vie probable est la plus grande des deux, depuis la naissance jusqu'à l'âge de 55 ans; à 56 ans, elle est égale à la vie moyenne, et elle lui devient inférieure pendant tout le reste de la vie.

129. On peut représenter graphiquement la vie moyenne et la vie probable. Soit APB la courbe de mortalité, à partir d'un âge $Oa = a$. Si l'on prend une ordonnée Pp, égale à la moitié de Aa, la vie probable sera représentée par ap. Il est facile de voir, de plus, que la vie totale du groupe de vivants Aa est représentée par l'aire de la courbe APB, de sorte que la vie moyenne est égale à am, pourvu que l'on place m de telle manière que la surface du rectangle AaM$'m$ soit égale à l'aire de la courbe. Si les décès par âges étaient en

nombre constant, la courbe de mortalité serait remplacée par la droite ADB; la vie moyenne et la vie probable seraient toutes deux égales à ad et égales à la moitié de l'in-

Fig. 6.



tervalle qui reste à parcourir entre l'âge Oa et la limite de la vie Ob. Dans l'âge mûr, ap et am sont plus grands que ad; dans la vieillesse, ce serait le contraire, parce que la courbe de mortalité devient concave au lieu d'être convexe.

On peut remarquer ici que l'intégration de la formule de Gompertz ou de la formule de Makeham donne l'aire de la courbe APb et, par conséquent, la valeur de la vie moyenne à un âge quelconque. Si, en effet, on représente l'équation de la courbe de mortalité par $y = f(x)$, la vie totale des individus de l'âge a, formant le groupe que l'on considère, a pour valeur

$$-\int_a^{\infty} x\,dy = af(a) + \int_a^{\infty} y\,dx;$$

la vie moyenne, comptée à partir de la naissance, mais pour les individus qui ont déjà atteint l'âge a, a donc pour valeur

$$a + \int_a^{\infty} \frac{y\,dx}{f(a)},$$

et la vie moyenne, à partir de l'âge a, qui est déjà atteint, est

$$\int_a^{\infty} \frac{y\,dx}{f(a)}.$$

La vie moyenne, à partir de la naissance, est

$$\int_0^{\infty} \frac{y\,dx}{f(0)},$$

$f(0)$ étant le nombre des vivants à 0 an, c'est-à-dire le nombre annuel des naissances. Si $f(x)$ représentait la totalité des habitants de l'âge x, composant une ville ou une nation, $\int_0^x y dx$ serait la population de cette ville ou de cette nation; et la vie moyenne s'obtiendrait, comme on le voit, en divisant la population, supposée constante, par le nombre des naissances, supposé également constant.

La détermination de la vie probable et de la vie moyenne a son utilité dans les travaux de statistique; mais, comme nous le verrons plus loin, ces deux éléments sont à peu près sans emploi pour les calculs auxquels donnent lieu les combinaisons d'assurances sur la vie.

CHAPITRE VIII.

ASSIMILATION DES OBLIGATIONS AMORTISSABLES A UN GROUPE DE POPULATION.

130. Les emprunts contractés par les villes, les compagnies de chemins de fer et les sociétés industrielles sont ordinairement réalisés par des émissions de titres, appelés *obligations*. Ces obligations rapportent un intérêt fixe et sont sujettes à l'amortissement, c'est-à-dire que l'emprunteur s'engage à le rembourser à un prix uniforme dans un certain délai et suivant une loi fixée à l'avance. Cette loi détermine le nombre des obligations qui seront amorties, ou remboursées, d'année en année, et c'est le sort qui désigne chaque année les obligations à amortir.

On peut donc assimiler la masse des obligations constituant un emprunt à un groupe, parfaitement homogène, d'individus ayant tous le même âge et assujettis à une mortalité exactement connue. Le nombre de ces individus est égal au nombre des obligations constituant l'emprunt; la date de leur naissance coïncide avec celle de l'émission de l'emprunt, c'est-à-dire avec l'époque à partir de laquelle les intérêts commencent à courir; leur âge, à un moment donné, est représenté par le nombre d'unités de temps qui se sont écoulées depuis lors; la date de leur décès n'est autre que la date à laquelle elles sont *amorties*, c'est-à-dire remboursées. Si l'amortissement a lieu par années, comme cela arrive toujours en pratique, le nombre d'obligations amorties à la fin d'une année représente le nombre d'individus décédés pendant cette année; le taux de mortalité correspondant est donc égal au rapport qui existe entre ce nombre et le nombre d'obligations qui étaient vivantes, ou non encore amorties, au commencement de la même année.

Au moment de l'émission de l'emprunt, les obligations sont à leur naissance, c'est-à-dire âgées de 0 an, et l'on sait

combien il doit en disparaître à 1 an, combien à 2 ans, à 3 ans, et ainsi de suite jusqu'à la fin de la période fixée pour l'amortissement, époque à laquelle disparaîtront les dernières obligations qui formaient le groupe primitif.

Le nombre des obligations amorties à chaque tirage va toujours en augmentant d'année en année, de sorte qu'il y a une certaine analogie entre la loi d'amortissement d'un groupe d'obligations et la loi de mortalité d'un groupe de population humaine. On trouve seulement ici beaucoup plus de régularité que dans la mortalité de l'espèce humaine, puisque tout est déterminé à l'avance et que le sort ne porte que sur les numéros des obligations à amortir, et non sur leur nombre. Un groupe d'obligations est pour ainsi dire le type parfait d'une couche homogène de population, dont la mortalité est connue d'avance sans erreur possible.

131. La théorie des emprunts par obligations sortirait du cadre de notre travail; elle a du reste été exposée de la manière la plus complète par M. Charlon dans son Ouvrage intitulé : *Théorie mathématique des opérations financières* (Gauthier-Villars, 1869) et dans son Mémoire sur les *Emprunts publics* (*Journal des Actuaires français*, n°s 1 et suivants). Ce qui peut être intéressant ici, c'est de reconstituer, pour un groupe d'obligations soumises à l'amortissement, les mêmes formules que nous avons établies précédemment pour un groupe de population humaine soumis à la loi de mortalité.

L'amortissement peut se faire suivant une loi quelconque; nous supposerons toujours que, conformément à ce qui se fait dans la pratique, on consacre à la fin de chaque année une somme ou annuité constante au service de l'intérêt et de l'amortissement; cette annuité doit être nécessairement plus élevée que celle qui serait nécessaire pour le service de l'intérêt seul, et elle se trouve déterminée quand on donne le nombre d'années au bout duquel on veut que l'amortissement soit effectué. Nous conserverons les notations adoptées par M. Charlon, et nous appellerons :

V le nombre d'obligations dont l'emprunt se compose à l'origine, autrement dit la valeur nominale de l'emprunt, en prenant pour unité la valeur nominale à laquelle chaque obligation doit être remboursée;

A l'annuité constante qui doit suffire au service de l'intérêt et de l'amortissement;

t le taux d'intérêt pendant l'unité de temps, qui est ici une année;

n le nombre d'années au bout duquel l'emprunt doit être totalement amorti;

$f_n(t)$ la fonction $\frac{1}{t}\left[1 - \frac{1}{(1+t)^n}\right]$;

S_p le nombre d'obligations que l'on amortit à la fin de la $p^{ième}$ unité de temps;

R_p le nombre d'obligations qui restent à amortir à cette même époque, après que le $p^{ième}$ amortissement a été effectué.

Conformément aux formules établies par M. Charlon (*Journal des Actuaires français*, 1872, p. 151), les quantités A, S_p et R_p se trouvent déterminées par les relations suivantes :

$$(34) \qquad A = \frac{V}{f_n(t)} = \frac{Vt}{1 - \frac{1}{(1+t)^n}},$$

$$(35) \qquad S_p = \frac{A}{(1+t)^{n-p+1}},$$

$$(36) \qquad R_p = A f_{n-p}(t).$$

132. *Équation du nombre des vivants.* — La valeur de R_p, qui donne le nombre des obligations vivantes, ou restant à amortir après p années écoulées, correspond à ce que nous avons appelé, au n° 118, l'*équation du nombre des vivants.*

En remplaçant A par sa valeur, on obtient pour la valeur de R_p en fonction du nombre V des obligations vivantes à l'origine

$$(36) \qquad R_p = \frac{V(1+t)^n}{1-(1+t)^n} - \frac{V}{(1+t)^n - 1}(1+t)^p.$$

133. *Équation des taux de mortalité.* — Le taux de mortalité à l'âge p est égal au rapport des extinctions survenant de l'âge p à l'âge $p+1$, au nombre des vivants à l'âge p, c'est-à-dire à

$$\frac{S_{p+1}}{R_p} = \frac{t}{(1+t)^{n-p} - 1}. \tag{37}$$

134. *Vie moyenne.* — La vie moyenne d'une obligation à un âge déterminé, c'est la somme des unités de temps qu'ont encore à vivre toutes les obligations existant alors, divisée par leur nombre. Il est facile de voir (Charlon, *Théorie mathématique des opérations financières*, n° 144) que cette vie moyenne est exprimée par la formule

$$\frac{n-p}{1 - \frac{1}{(1+t)^{n-p}}} - \frac{1}{t}. \tag{38}$$

Pour $p = 0$, c'est-à-dire à l'origine de l'emprunt, cette vie moyenne est égale à

$$\frac{n}{1 - \frac{1}{(1+t)^{n}}} - \frac{1}{t}.$$

135. *Vie probable.* — La vie probable d'une obligation, c'est le temps qui doit s'écouler pour que l'amortissement réduise de moitié le nombre des obligations existantes. Elle est égale à

$$n - p - \frac{\log \frac{2}{1 + \frac{1}{(1+t)^{n-p}}}}{\log(1+t)}. \tag{39}$$

Quand $p = 0$, c'est-à-dire à l'origine de l'emprunt, cette vie probable est égale à

$$n - \frac{\log \frac{2}{1 + \frac{1}{(1+t)^{n}}}}{\log(1+t)}.$$

On peut remarquer que ces trois derniers éléments calculés,

le taux de mortalité, la vie moyenne et la vie probable, ne dépendent pas de n et de p, mais seulement de $n - p$, temps qui reste à courir jusqu'à la fin de l'amortissement. Ils restent les mêmes pour un emprunt amortissable en 100 ans, et déjà âgé de 60 ans, que pour un emprunt amortissable en 50 ans et déjà âgé de 10 ans.

136. *Exemple.* — Nous ferons une application de ces divers calculs à l'emprunt émis le 1er juillet 1864 par la Compagnie des chemins de fer de l'Ouest. Cet emprunt se définit de la manière suivante : Il se compose de 300000 obligations de 500 francs, rapportant 3 pour 100 ou 15 francs d'intérêt annuel, et amortissables en 87 payements, dont le premier a lieu le 1er juillet 1865, et le dernier le 1er juillet 1951 : l'origine des âges est donc le 1er juillet 1864. L'annuité qui fait le service de l'intérêt et de l'amortissement doit être constante.

Les formules des nos 131 et suivants donnent donc pour cet emprunt

$$(34) \qquad A = \frac{300\,000 \times 0,03}{1 - \dfrac{1}{1,03^{87}}} = 9744,604,$$

l'unité monétaire étant 500 francs, valeur nominale d'une obligation, soit, en francs, 4872302 francs.

$$(35) \qquad S_p = \frac{4872302^{\mathrm{f}}}{1,03^{88-p}},$$

$$(36) \qquad R_p = 324820\left(1 - \frac{1}{1,03^{87-p}}\right),$$

$$(38) \qquad \text{Vie moyenne} = \frac{87 - p}{1 - \dfrac{1}{1,03^{87-p}}} - 33,33.$$

$$(39) \qquad \text{Vie probable} = 87 - p - \frac{\log \dfrac{2}{1 + \dfrac{1}{1,03^{87-p}}}}{\log 1,03},$$

$$(37) \quad \text{Taux de mortalité} = \frac{0,03}{1,03^{87-p} - 1}.$$

Si l'on veut se placer au 1er juillet 1876 et chercher quel est le nombre d'obligations à amortir ce jour; quel est, après cet amortissement effectué, le nombre d'obligations encore en vie; quelles sont leur vie moyenne et leur vie probable, il suffit de faire $p = 11$, et l'on trouve alors

$$\begin{aligned} S_{11} &= 1031, \\ R_{11} &= 290464, \\ \text{Vie moyenne} &= 51 \text{ ans}, \\ \text{Vie probable} &= 56 \text{ ans}, \\ \text{Taux de mortalité} &= 0{,}035. \end{aligned}$$

Le nombre d'obligations restant à amortir après le 1er juillet 1876 et le nombre d'obligations amorties ce jour sont bien ici conformes aux nombres inscrits dans le Tableau d'amortissement publié par la Compagnie de l'Ouest; quant à l'annuité, on a été obligé, dans ce Tableau, de l'augmenter ou de la diminuer de quelques centaines de francs à chaque tirage, parce qu'on ne peut amortir à chaque fois qu'un nombre entier d'obligations.

137. On peut représenter graphiquement par des figures très-simples les résultats des formules qui précèdent. La formule (34) donne pour la valeur de l'annuité A

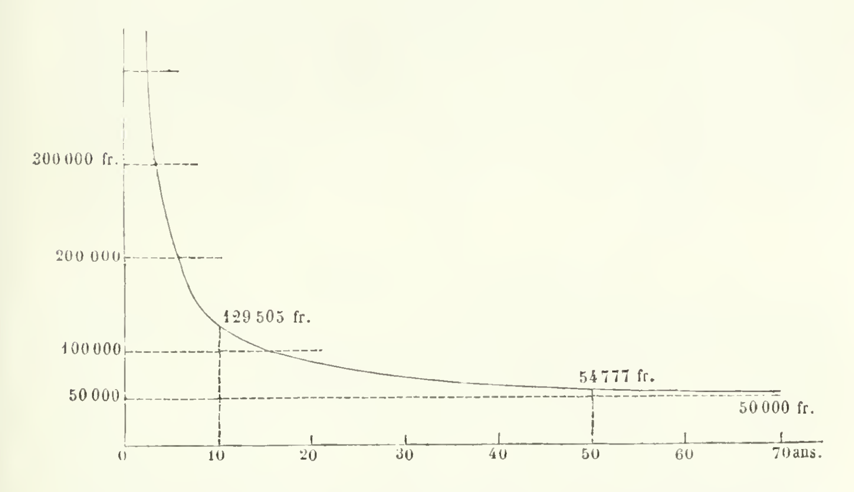
$$A = \frac{Vt}{1 - \frac{1}{(1+t)^n}}. \tag{40}$$

Si on laisse V constant et qu'on fasse varier n, on verra comment varie le montant de l'annuité A avec la durée de l'amortissement. On représentera ces variations par une courbe dont les abscisses seront les durées n, et dont les ordonnées seront les valeurs de A. Cette courbe, que nous figurons ci-contre, a pour asymptotes l'axe des y et une parallèle à l'axe des x menée à la distance Vt; l'annuité ne peut en effet jamais être inférieure à Vt, même quand elle se payerait pendant un nombre infini d'années. Pour $x = 1$,

la valeur de A est $V(1+t)$; pour $x=2$, elle est réduite à très-peu près à moitié; pour $x=3$, à très-peu près au tiers. Pour amortir 1 million à 5 pour 100, il faut payer une annuité de 129 505 francs pendant 10 ans, ou de 70 952 francs pendant 25 ans, ou de 54 777 francs pendant 50 ans, ou de



Fig. 4.

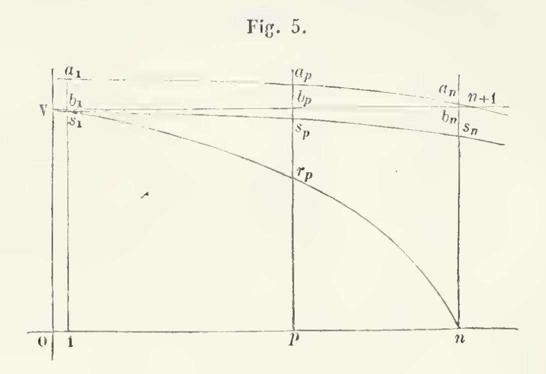


Courbe indiquant les annuités nécessaires pour amortir un million à 5 pour 100 en un nombre d'années variable.

50 384 francs pendant 100 ans, ou de 50 000 francs pendant toute l'éternité : c'est ce que résume la courbe ci-dessus. Cette courbe permet de reconnaître d'un coup d'œil qu'un emprunt remboursable dans un délai un peu long, 60 ou 80 ans par exemple, n'exige qu'une annuité à peine supérieure au montant de l'intérêt seul. Il est donc très-avantageux pour un emprunteur, surtout quand cet emprunteur est un État, dont la durée doit être très-longue, de ne contracter que des dettes amortissables, serait-ce en un délai de 80 ou 100 ans. Les États font cependant presque toujours le contraire, et contractent presque tous leurs emprunts en rentes perpétuelles, et non en obligations amortissables.

138. Quand V, n et t sont connus, les formules précédentes donnent les valeurs de A, S et R. Voici comment on peut les représenter graphiquement (*fig.* 5).

Fig. 5.



Amortissement des obligations.

$a_q s_p$ annuité constante.
$a_v b_q$ payement fait pour l'intérêt.
$b_p s_p$ payement fait pour l'amortissement.
$s_p r_p$ obligations précédemment amorties.
$r_p p$ obligations restant à amortir.

Soient, sur l'axe des abscisses, $On = n$, représentant n unités de temps, O1 et Op représentant 1 et p unités de temps, et sur l'axe des ordonnées OV = V unités monétaires. Menons Vb parallèle à On et $1a_1$ parallèle à l'axe OV; cette ordonnée $1a_1$ coupera Vb en un point b_1, et nous porterons au-dessus de b_1 la longueur $b_1 a_1 = Vt$, et au-dessous la longueur $b_1 s_1 = Vt \frac{1}{(1+t)^n - 1}$; $a_1 s_1$, qui est égal à A, représentera l'annuité constante à payer. Cette annuité, pour la première année, se divise en une somme égale à $a_1 b_1$, payée pour intérêt, et une somme égale à $b_1 s_1$, payée pour amortissement. Par le point s_1, faisons passer la courbe $s_1 s_p s_n$, dont l'équation déterminante est

$$b_p s_p = A - R_{p-1} t = \frac{A}{(1+t)^{n-p+1}};$$

on remarquera que cette courbe coupe l'ordonnée na_n en un

point s_n, déterminé par la relation $b_n s_n = \frac{A}{1+t}$ et qu'elle est asymptote, pour un temps $-\infty$, à la droite Vb. Par le point a, faisons passer une deuxième courbe, parallèle à celle-ci, et qui vient couper la droite Vb en un point b_{n+1} situé à une distance $Vb_{n+1} = n + 1$. Dès lors, tous les fragments d'ordonnées, tels que $a_p s_p$, compris entre les deux courbes, sont constants et égaux à A ; et la partie $b_p a_p$, située au-dessus de Vb, représente la portion de l'annuité A consacrée à l'intérêt dans le $p^{ième}$ payement, tandis que la portion $b_p s_p$ représente la portion consacrée à l'amortissement. On voit ainsi la première diminuer et la seconde augmenter constamment.

Si l'on fait passer par les points V et n une autre courbe dont l'équation est

$$pR_p = Af_{n-p}(t) = \frac{A}{t}\left[1 - \frac{1}{(1+t)^{n-p}}\right],$$

courbe qui passera nécessairement aussi par le point S_1, et si l'on appelle r_p le point où elle est coupée par l'ordonnée p, on voit que pr_p représente le nombre des obligations restant encore en vie après le temps p écoulé (et après le $p^{ième}$ amortissement effectué), tandis que $b_p r_p$ représente le $p^{ième}$ amortissement, et $s_p r_p$ la somme de tous les amortissements précédents. La courbe V_n est donc celle qui correspond à la courbe dite *du nombre des vivants*, quand il s'agit d'une population humaine. Elle s'approche beaucoup d'une ligne droite s'il s'agit d'un amortissement fait en quelques années; elle est, au contraire, très-convexe lorsque la durée de l'amortissement est longue. Elle a une certaine ressemblance de forme avec les courbes du nombre des vivants déduites des diverses Tables de mortalité, pourvu que l'on ne considère celles-ci qu'entre les âges de 20 ans et de 80 ans environ.

Enfin on peut figurer aussi la vie moyenne et la vie probable des obligations, à partir d'une époque quelconque, par un procédé identique à celui qui a été indiqué au n° 129, lorsqu'il s'agissait des courbes de mortalité.

CHAPITRE IX.

CALCUL DES PRIMES.

139. Les assurances sur la vie comprennent toutes les opérations dont les effets dépendent de la durée de la vie humaine. La Compagnie qui assure prend l'engagement de payer certaines sommes soit au décès de l'assuré, soit à des époques déterminées, à la condition, ou que l'assuré soit encore vivant à ces diverses époques, ou qu'il ne le soit plus. De son côté, l'assuré, ou la personne qui contracte avec la Compagnie, prend l'engagement de payer à celle-ci certaines primes, à des intervalles périodiques, tous les ans ou tous les semestres. Ces primes sont, dans la pratique, soumises à diverses modalités : elles peuvent être constantes, ou aller en croissant ou en décroissant d'année en année; elles peuvent être exigibles pendant toute la durée de la vie de l'assuré, ou pendant un temps limité; elles peuvent reposer sur une ou sur deux têtes; on peut encore stipuler qu'elles rapporteront à celui qui les verse un intérêt constant, ou qu'elles lui seront remboursées dans certaines éventualités, etc.

Quel que soit le mode de payement adopté, les primes doivent être calculées de telle manière que l'engagement pris par la Compagnie et l'engagement pris par le contractant aient la même valeur actuelle (nous verrons plus loin d'où provient le bénéfice de la Compagnie). Ce calcul se décompose en deux, d'après la méthode générale suivante :

1° On cherche d'abord quelle est la valeur actuelle de l'engagement pris par la Compagnie; cette valeur indique de suite la somme que devrait payer le contractant s'il voulait se libérer en un seul payement; c'est donc la prime unique afférente à l'opération d'assurance projetée.

2° Connaissant la prime unique, ou la valeur actuelle de l'engagement réciproque des deux parties, et étant donné le mode de payement que l'on a choisi pour les primes annuelles, on calcule quel doit être le montant de ces primes pour que leur ensemble donne une valeur actuelle égale à la précédente. Dans ce second calcul, on n'a plus à faire entrer en ligne de compte la nature de l'opération d'assurance dont il s'agit; on n'opère que sur la prime unique précédemment calculée, sans s'inquiéter de savoir à quelle opération elle correspond, et l'on applique les méthodes générales qui servent à transformer une prime unique en primes annuelles équivalentes.

Pour faire le premier, ainsi que le second calcul, il faut préalablement connaître la théorie des annuités viagères, que nous allons exposer d'abord. L'ensemble des calculs, dont nous avons à nous occuper dans ce Chapitre, se décomposera donc en quatre parties, qui formeront autant de paragraphes distincts :

§ Ier. Théorie des annuités viagères.

§ II. Calcul de la prime unique des principales combinaisons d'assurances.

§ III. Transformation d'une prime unique en primes annuelles.

§ IV. Calcul des primes des diverses combinaisons d'assurances.

§ Ier. — *Théorie des annuités viagères.*

140. On appelle *annuité viagère* sur une tête d'âge a et l'on désigne par X_a la valeur actuelle d'une série de sommes de 1 franc, payables la première dans 1 an, la deuxième dans 2 ans, etc., tant qu'une personne, âgée aujourd'hui de a années, continuera à exister.

La valeur d'une annuité viagère dépend du taux d'intérêt auquel on suppose que les capitaux peuvent être placés, et

en outre de la loi de mortalité à laquelle est assujettie la personne sur la tête de laquelle elle repose, en d'autres termes, de la Table de mortalité adoptée. Ces deux éléments, taux de l'intérêt et Table de mortalité, déterminent complétement la valeur de l'annuité viagère.

Dans les calculs d'assurances sur la vie, on suppose toujours que les capitaux versés entre les mains de la Compagnie sont immédiatement placés par elle, à intérêts composés se capitalisant d'année en année, et que le taux de ces placements reste le même pendant une période de temps indéfinie.

On néglige donc la perte d'intérêts que la Compagnie éprouve forcément, par suite de la nécessité où elle se trouve, en pratique, de garder toujours entre ses mains un certain fonds de roulement non placé, qui ne rapporte rien; mais, d'un autre côté, on suppose que les intérêts sont seulement capitalisés par années, tandis qu'ils peuvent souvent, dans la pratique, être capitalisés à des intervalles plus rapprochés. On peut admettre qu'il y a une certaine compensation entre ces deux causes d'erreur; mais il en subsiste une autre qui est beaucoup plus importante : elle consiste en ce que la Compagnie, pour placer ses capitaux, est obligée d'accepter le taux d'intérêt du moment, taux qui varie sans cesse, tandis que l'on a admis qu'elle pouvait toujours faire ses placements à un taux constant. Aussi, dans les calculs, on doit choisir ce dernier taux assez faible pour être à peu près certain que la Compagnie pourra toujours, pendant une période de 50 à 60 ans que peuvent embrasser les assurances, replacer ses capitaux à un taux égal ou supérieur. L'erreur qui en résulte se traduira donc, pour la Compagnie, par un bénéfice, que l'on peut appeler *bénéfice de placements*. Ce bénéfice, qu'il est impossible de calculer par avance, puisqu'il dépend tout à fait des conditions du marché financier, devient souvent très-important et même supérieur à celui qui peut résulter des opérations d'assurances proprement dites. Il est clair que, plus le taux fixé d'avance est faible, toutes choses égales

d'ailleurs, et plus les tarifs de primes doivent être élevés; plus grand doit être également le bénéfice réalisé par l'assureur sur ses placements de fonds.

En France, toutes les Compagnies ont pris, pour calculer leurs tarifs, le taux de 4 pour 100 l'an; en Angleterre, beaucoup de Compagnies ont abaissé ce taux à 3,5 et même 3 pour 100. Dans les exemples que nous aurons à calculer ci-après, nous appliquerons le taux de 4 pour 100.

141. Étant admis que le taux de l'intérêt annuel restera constant et égal à t, pendant une période de temps indéterminée, il résulte des formules ordinaires de l'intérêt composé :

1° Qu'une somme quelconque A, payée aujourd'hui, vaudra, dans n années, $A(1+t)^n$;

2° Qu'une somme A, à payer dans n années, ne vaut aujourd'hui que $\frac{A}{(1+t)^n}$ ou $A(1+t)^{-n}$, ce qui revient à dire que l'engagement de payer une somme A dans n années a pour prix ou pour valeur actuelle $\frac{A}{(1+t)^n}$.

On admet, par convention, que ces formules sont encore exactes quand n représente, au lieu d'un nombre entier d'années, un nombre fractionnaire, ou même une fraction plus petite que l'unité. Cette convention est le corollaire, le complément de celle qu'on est obligé de faire pour adopter un taux uniforme et constant d'intérêt annuel.

142. Nous avons dit que l'on adoptait pour le taux d'intérêt t une valeur plus faible que le taux qu'on peut réellement obtenir dans la pratique pour les placements de fonds : il est bon de se rendre compte de l'influence que peut exercer cet écart entre le taux de placement adopté dans les calculs et le taux que l'on peut réaliser dans la pratique.

S'il s'agit d'une somme A, versée aujourd'hui à la Compagnie, sa valeur dans n années, $A(1+t)^n$, sera en réalité

plus forte que le calcul ne l'indique : il y aura donc comme marge un certain bénéfice de placement.

S'il s'agit d'une somme A à payer dans n années, sa valeur actuelle $A(1+t)^{-n}$ est en réalité plus faible que le calcul ne l'indique. Si donc c'est la Compagnie qui doit la payer dans n années, il y aura encore un certain bénéfice de placement; mais si, au contraire, c'est le contractant qui doit payer et la Compagnie qui doit recevoir dans n années la somme A, il y aura un mécompte, une perte sur les placements de fonds; en d'autres termes, si le taux t est plus petit que celui que l'on peut réaliser dans la pratique, la somme A à recevoir par la Compagnie dans n années a réellement une valeur actuelle plus faible que la valeur $A(1+t)^{-n}$, que l'on fait entrer dans les calculs. Nous aurons à revenir plus loin sur les conséquences de cette remarque.

143. *Annuités viagères.* — Nous avons donné au n° **140** la définition de l'annuité viagère.

Si l'on désigne par Q_a^n la valeur actuelle d'une somme de 1 franc, payable dans n années, mais seulement à la condition qu'une personne âgée aujourd'hui de a années existera encore à cette époque, on aura

$$Q_a^n = (1+t)^{-n} \frac{f(a+n)}{f(a)}. \tag{41}$$

En effet, si le payement n'était soumis dans n années à aucune éventualité, sa valeur actuelle serait $(1+t)^{-n}$; on obtient donc la valeur cherchée en multipliant celle-ci par la fraction $\frac{f(a+n)}{f(a)}$, qui exprime la probabilité que la personne désignée existera encore dans n années, $f(a)$ désignant toujours, comme au n° **118**, le nombre des vivants à l'âge a.

D'après ce qui a été dit au n° **142**, si t a dans la réalité une valeur plus forte que celle qui entre dans les calculs, la valeur donnée pour Q_a^n par la formule (41) est plus forte que la valeur réelle.

Il suit de ce qui précède que la valeur de l'annuité viagère est

$$(42) \qquad X_a = Q_a^1 + Q_a^2 + Q_a^3 + \ldots + Q_a^{\omega - a},$$

cette série étant prolongée jusqu'à ce qu'on trouve un terme nul, provenant du décès de toutes les personnes âgées aujourd'hui de a années. Si l'on désigne par ω l'extrême limite de la vie humaine, il y aura $\omega - a$ termes, dont le dernier sera $Q_a^{\omega-a}$.

Ajoutons que, si t a dans la réalité une valeur plus forte que celle qui entre dans les calculs, la valeur donnée par la formule (42) pour l'annuité X_a sera plus forte que la valeur réelle. La même remarque s'applique à toutes les annuités diverses qui vont être calculées par la suite.

On a constamment besoin de connaître les valeurs numériques de X aux divers âges; il y a plusieurs manières de disposer les calculs pour les obtenir.

144. *Première méthode.* — D'après la formule (41), il est facile de voir que

$$Q_{a+1}^n = \frac{Q_a^{n+1}}{Q_a^1},$$

et par conséquent

$$X_{a+1} = \frac{1}{Q_a^1}(Q_a^2 + Q_a^3 + \ldots),$$

d'où l'on tire

$$(43) \qquad X_a = Q_a^1(1 + X_{a+1}).$$

On aurait pu, du reste, écrire cette formule immédiatement, en observant que l'annuité sur une tête d'âge a est égale à l'annuité sur une tête d'âge $a+1$, payable d'avance, c'est-à-dire $1 + X_{a+1}$, valeur ramenée à ce qu'elle serait un an avant le premier versement, à l'aide du multiplicateur Q_a^1.

La formule (43) permet de calculer toutes les annuités de proche en proche, en commençant par les âges les plus avancés de la Table.

Cette méthode a l'avantage de s'appliquer avec la même

facilité au calcul des annuités viagères sur deux têtes, ainsi que nous le verrons plus loin.

145. *Deuxième méthode.* — Quand on veut calculer des Tables complètes, donnant les annuités à tous les âges, il est préférable de disposer les calculs d'une manière plus systématique. On dresse deux Tables auxiliaires : l'une des nombres T, définis par la relation

$$T_a = (1+t)^{\omega - a} f(a);$$

l'autre des nombres G, définis par la relation

$$G_a = T_a + T_{a+1} + T_{a+2} + \ldots;$$

et l'on a alors

$$Q_a^n = \frac{T_{a+n}}{T_a},$$

et par conséquent

(43) $$X_a = \frac{G_{a+1}}{T_a};$$

$$1 + X_a = \frac{G_a}{T_a},$$

c'est la méthode indiquée par M. Maas, dans son *Traité des Annuités viagères*. (Paris, 1868.)

146. *Troisième méthode.* — Les actuaires anglais emploient un procédé de calcul un peu différent, qui donne plus de simplicité à toute la série des opérations subséquentes (*voir* le travail de M. de Morgan, vol. XII du *Journal des Actuaires anglais*). Il faut encore dresser une Table auxiliaire, qui est appelée *Table de commutation*, et qui donne cinq séries de nombres :

1° Les nombres D, définis par la relation

(44) $$D_a = f(a)(1+t)^{-a}.$$

2° Les nombres N, qui donnent les sommes des précédents

(45) $$N_a = D_{a+1} + D_{a+2} + D_{a+3} + \ldots$$

3° Les nombres S, qui donnent les sommes des nom-

bres N

(46) $$S_a = N_a + N_{a+1} + N_{a+2} + \ldots.$$

4° Les nombres M, définis par la relation

(47) $$M_a = \frac{N_{a-1}}{1+t} - N_a.$$

5° Les nombres R, qui donnent les sommes des nombres M

(48) $$R_a = M_a + M_{a+1} + \ldots.$$

Nous indiquerons par la suite l'emploi de ces diverses séries de nombres. En ce qui concerne le calcul des annuités, dont nous nous occupons actuellement, on ne se sert que des nombres D et N. La formule (42) donne, en effet,

(49) $$X_a = \frac{D_{a+1} + D_{a+2} + D_{a+3} + \ldots}{D_a} = \frac{N_a}{D_a}.$$

Toute la série des annuités X se calcule donc facilement par logarithmes.

Il est bon de remarquer aussi que les nombres D donnent, par une simple division, les valeurs de Q (n° 41); car on a toujours $Q_a^n = \frac{D_{a+n}}{D_a}$.

147. La Table de commutation et les diverses Tables d'annuités ont été calculées et publiées par les actuaires anglais pour les Tables de mortalité H^M, H^F et $H^{M(5)}$, ajustées par M. Woolhouse, et pour les taux d'intérêt 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5 et 6 pour 100. (On a appelé $H^{M(5)}$ une Table de mortalité dressée pour les hommes assurés, mais en ne tenant compte que de ceux qui sont assurés depuis 5 ans au moins). On trouvera ces résultats, ainsi que tous les autres éléments qui pourraient être utiles pour les calculs d'assurances sur la vie, dans deux ouvrages anglais tout récents : le premier, publié par l'*Institut des Actuaires* (Londres, 1872), a pour titre : *Tables deduced from the mortality experience*; le second, dû à M. Price Hardy (Londres, 1873, Layton éditeur), est intitulé *Valuation Tables*. Nous reproduisons à la fin du volume la Table de commutation dressée d'après la Table de mortalité H^M, et au taux d'intérêt de 4 pour 100, ainsi que les principaux résultats, sur

lesquels nous aurons occasion de revenir dans le courant de ce Chapitre.

148. Une annuité a toujours une valeur actuelle d'autant plus faible que le taux d'intérêt adopté est plus élevé. La divergence entre les deux valeurs est elle-même plus forte pour les âges jeunes que pour les âges avancés, parce que l'influence du taux de l'intérêt se fait sentir plus longtemps. Le tableau suivant donne une idée de ces variations pour ce qui concerne l'annuité viagère sur une tête.

AGE.	3 %.	3 ½.	4 %.	4 ½.
30 ans................	19,867 fr	18,416 fr	17,131 fr	15,989 fr
50 ans................	13,896	13,187	12,536	11,936

Ainsi, pour une augmentation de $\frac{1}{2}$ pour 100 dans le taux d'intérêt adopté, l'annuité à 30 ans diminue de 7 pour 100 environ de sa valeur, et l'annuité à 50 ans diminue seulement de 5 pour 100 environ de sa valeur.

149. *Annuités semestrielles, trimestrielles, continues.* — Indépendamment de l'annuité proprement dite, qui se paye par années, on est amené à en considérer d'autres, qui se payent par fractions d'année. On appelle *annuité payable par fraction* $\frac{1}{m}$ *d'année* l'annuité dans laquelle la somme de 1 franc, au lieu d'être payée en une fois, à la fin de chaque année, est payée en m payements, égaux chacun à $\frac{1}{m}$ et effectués à la fin de chaque fraction $\frac{1}{m}$ d'année. Ainsi l'annuité semestrielle comporte chaque année deux payements de $\frac{1}{2}$ franc, faits à la fin de chaque semestre. Lorsque m augmente de plus en plus et tend vers l'infini, la valeur de l'annuité tend vers une limite que l'on appelle *annuité continue*. L'annuité continue est donc une annuité payable par frac-

tions infiniment petites, à des intervalles de temps infiniment petits.

150. La considération des annuités continues a été introduite dans la science par M. Woolhouse, qui a publié un remarquable travail à ce sujet dans le *Journal des Actuaires anglais* en 1869. Cette théorie n'est qu'une des branches d'une méthode aussi nouvelle que féconde, et qui a été développée par cet auteur sous le nom de *méthode continue*. Cette méthode embrasse à la fois la définition et le calcul du taux de l'intérêt, du taux de mortalité et enfin des annuités viagères sur une ou plusieurs têtes. Nous allons en indiquer les traits principaux, les définitions et les résultats, renvoyant le lecteur, pour la démonstration et la discussion des formules, aux Mémoires de M. Woolhouse (*Journal des Actuaires anglais*, t. XI et XV), au travail de M. Achard (*Journal des Actuaires français*, t. I[er], 1872) et au Traité de M. Laurent.

151. *Taux de l'intérêt continu.* — Au lieu de placer un capital au taux d'intérêt t, payable par années, on peut le placer au taux t_m, payable par fractions $\frac{t_m}{m}$, et à des intervalles égaux, marqués par la fraction $\frac{1}{m}$ de l'année. Pour que l'on obtienne, de l'une et de l'autre manière, le même capital au bout d'un temps quelconque, il faut que t_m satisfasse à la relation

$$1 + \frac{t_m}{m} = (1 + t)^{\frac{1}{m}}.$$

Quand m augmente et tend vers l'infini, t_m tend vers une limite que l'on peut désigner par t_∞ ou par ρ et qui n'est autre que

$$\rho = \text{lognép}(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots,$$

et l'on peut exprimer aussi t en fonction de ρ,

$$t = e^\rho - 1 = \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Le taux continu est toujours plus faible que le taux ordinaire, mais il en diffère peu; ainsi :

Pour $t=4$ pour 100, $\rho=0{,}0392$;
» $t=5$ » 100, $\rho=0{,}0489$;
» $t=6$ » 100, $\rho=0{,}0583$.

152. *Taux instantané de mortalité.* — On appelle *mortalité*, à l'âge a et pendant le temps n, le rapport du nombre des décès au nombre des têtes vivantes au commencement de la période de temps n; et *taux moyen de mortalité* le rapport entre la mortalité et le nombre n, qui mesure la période de temps considéré. La mortalité est donc

$$\frac{f(a)-f(a+n)}{f(a)}$$

et le taux moyen de mortalité est

$$\frac{f(a)-f(a+n)}{nf(a)}.$$

Lorsque la période de temps considérée n diminue sans cesse et tend vers zéro, ce taux tend vers une limite que l'on nomme le *taux instantané de mortalité* et qui a pour valeur

$$-\frac{f'(a)}{f(a)}; \tag{50}$$

c'est ce que les auteurs anglais appellent *force of mortality.*

Il est impossible de calculer exactement cette valeur à l'aide d'une Table de mortalité, puisqu'il faut établir la formule de la dérivée $f'(x)$; on ne pourrait le faire que si l'on avait trouvé une formule $f(x)$ représentant exactement les variations du nombre des vivants; mais on obtiendra facilement une approximation répondant, et au delà, à tous les besoins de la pratique, puisqu'il suffit d'adopter pour $f(x)$ une formule qui ait, ainsi que sa dérivée, pour $x=a$ une valeur égale à celle de la réalité. Cela revient à tracer une courbe dont la tangente, au point correspondant à l'âge a, ait une

inclinaison déterminée, ce que l'on obtiendra ou en adoptant pour la courbe la formule de Gompertz, ou en la remplaçant par une courbe du deuxième degré, facilement différentiable et passant par les cinq points $a-2$, $a-1$, a, $a+1$, $a+2$. Pratiquement, on n'a même pas besoin d'autant d'exactitude ; on peut admettre que la tangente à la courbe de mortalité au point a est parallèle à la corde ou sécante qui joint les points $a-1$ et $a+1$, ce qui donne pour la dérivée $f'(a)$ la valeur $\frac{f(a+1)-f(a-1)}{2}$ et pour le taux instantané la valeur

$$\frac{f(a-1)-f(a+1)}{2f(a)}.$$

Le taux instantané de mortalité diffère généralement peu du taux ordinaire; il est plus petit que lui dans la vie adulte, et plus grand au contraire dans l'enfance et dans la vieillesse; les différences deviennent considérables aux deux limites extrêmes de la vie.

Ainsi, d'après la Table de Duvillard, le taux instantané est, à 1 an, 0,214, tandis que le taux ordinaire est 0,125; à 6 ans, 0,0151 au lieu de 0,0125; à 11 ans, 0,0776 au lieu de 0,0779; à 30 ans, 0,01544 au lieu de 0,01549; à 40 ans, 0,01887 au lieu de 0,01891 ; à 60 ans, 0,0426 au lieu de 0,0430 ; à 70 ans, 0,0819 au lieu de 0,0814; etc. D'après la Table HM des vingt Compagnies, le taux instantané est, à 11 ans, 0,00445 au lieu de 0,00399; à 30 ans, 0,00763 au lieu de 0,00772; à 40 ans, 0,01024 au lieu de 0,01031 ; à 60 ans, 0,0290 au lieu de 0,0297; à 75 ans, 0,0993 au lieu de 0,0984; à 90 ans, 0,309 au lieu de 0,279.

153. *Annuité continue.* — L'annuité viagère ordinaire a pour valeur l'équation (42)

$$Q_a^1 + Q_a^2 + \ldots = \frac{f(a+1)}{f(a)(1+t)} + \frac{f(a+2)}{f(a)(1+t)^2} + \ldots.$$

Si la somme de 1 franc, au lieu d'être payée en une fois à la fin de l'année, est payée en versements égaux à h, éche-

lonnés sur h intervalles équidistants, la valeur de l'annuité qui en résulte sera représentée par

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{hf(a+hz)}{f(a)(1+t)^{hz}},$$

c'est-à-dire par la somme d'une série de termes semblables, dans lesquels z devra varier depuis 1 jusqu'à la limite de la vie. Lorsque h devient infiniment petit, cette valeur tend vers une limite, qui n'est autre que l'annuité continue et que l'on représente par $\overline{X}$. La valeur de l'annuité continue est donc représentée par une intégrale

(51) $$\overline{X}_a = \int_0^{\infty} \frac{f(a+x)}{f(a)(1+t)^x}\, dx.$$

On peut, au moyen d'intégrations approchées, obtenir une formule qui donne avec une grande approximation la valeur de l'annuité continue en fonction de l'annuité ordinaire X. En désignant le taux instantané de mortalité par τ, et le taux de l'intérêt continu par ρ, cette formule est la suivante :

(52) $$\overline{X} = X + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{12}(\tau + \rho)$$

(WOOLHOUSE, *Journal des Actuaires anglais*, t XI. — ACHARD, *Journal des Actuaires français*, t. I).

Elle est vraie, quelle que soit la Table de mortalité adoptée; elle suffit pour faire voir que l'annuité continue est toujours plus grande que l'annuité proprement dite, et que la différence est à très-peu près de $0^{fr},496$.

Premier exemple. — A l'âge de 30 ans, avec la Table de mortalité H^M des vingt Compagnies, on a

$$X = 17,1309,$$
$$\tau = 0,0076,$$
$$\rho = 0,0392 \text{ pour } t = 004;$$

on aura donc

$$\overline{X} = 17,6269,$$

ou approximativement

$$X + 0,25,$$

ou approximativement

$$X + 0,37.$$

Deuxième exemple. — A l'âge de 60 ans, avec la Table de Duvillard, on a

$$X = 8,3416,$$
$$\tau = 0,00426,$$
$$\rho = 0,0392,$$

et, par conséquent,

$$\overline{X} = 8,8380.$$

154. *Annuités semestrielles, trimestrielles, etc.* — Quand une annuité est payable par semestres, par trimestres, ou par fractions quelconques de l'année, sa valeur est donnée par la formule suivante, dans laquelle m représente le nombre de payements égaux en lesquels elle est subdivisée dans le cours de l'année :

$$(53) \qquad X + \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\tau + \rho).$$

Ainsi l'annuité semestrielle a pour valeur

$$X + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{16}(\tau + \rho),$$

ou approximativement

$$X + 0,25,$$

et l'annuité trimestrielle

$$X + \tfrac{3}{8} - \tfrac{5}{64}(\tau + \rho),$$

ou approximativement

$$X + 0,37.$$

Premier exemple. — A l'âge de 30 ans, avec la Table de mortalité H^M, les valeurs de X, τ et ρ étant les mêmes que dans l'exemple précédent, on aura pour l'annuité semestrielle

$$17,379$$

Deuxième exemple. — A l'âge de 60 ans, avec la Table de mortalité de Duvillard, on aura pour l'annuité trimestrielle

$$8,713.$$

155. *Annuité sur deux têtes.* — On appelle *annuité sur deux têtes*, et l'on désigne par $X_{a,b}$, la valeur actuelle d'une

série de sommes de 1 franc, payables au bout d'un an, deux ans, etc., tant que deux personnes, âgées aujourd'hui de a et de b années, continueront à exister toutes les deux. On établit cette valeur en procédant comme au n° **141**. Si l'on désigne par $Q^n_{a,b}$ la valeur actuelle d'une somme de 1 franc, payable dans n années, mais seulement à la condition que deux personnes d'âges a et b existeront alors toutes deux, on aura

$$(54)\qquad Q^n_{a,b} = (1+t)^{-n}\,\frac{f(a+n)}{f(a)}\,\frac{f(b+n)}{f(b)}$$

et

$$(55)\qquad X_{a,b} = Q^1_{a,b} + Q^2_{a,b} + Q^3_{a,b} + \dots$$

Or on reconnaîtra facilement que

$$Q^n_{a+1,b+1} = \frac{Q^{n+1}_{a,b}}{Q^1_{a,b}};$$

d'où l'on conclut

$$X_{a+1,b+1} = \frac{1}{Q^1_{a,b}}(X_{a,b} - 1),$$

ou bien

$$(56)\qquad X_{a,b} = (1 + X_{a+1,b+1})\,Q^1_{a,b}.$$

Cette formule est analogue à l'équation (44), et elle permet de calculer de proche en proche les annuités sur deux têtes, en calculant d'abord une Table des nombres $Q_{a,b}$, et en procédant à partir de l'extrémité de la Table de mortalité, l'annuité sur deux têtes étant égale à zéro, si l'on prend l'une des deux assez âgée pour qu'elle ait dépassé la limite de la vie humaine, c'est-à-dire l'âge le plus avancé indiqué par la Table dont on se sera servi.

On trouvera dans l'ouvrage anglais cité plus haut : *Tables deduced from the mortality experience, etc.*, trois Tables complètes d'annuités sur deux têtes, calculées avec quatre décimales pour la Table de mortalité H^M et pour les taux d'intérêt de 3, 3 ½ et 4 pour 100. Nous reproduisons à la fin du volume la Table à 4 pour 100.

Calcul des annuités sur deux têtes par la formule de Gompertz.

156. A défaut d'une Table d'annuités sur deux têtes, calculée d'avance pour la Table de mortalité et pour le taux d'intérêt dont on veut se servir, on peut encore calculer approximativement ces annuités, soit au moyen de la formule de Gompertz, soit au moyen de la formule de Mackeham.

La formule de Gompertz, ainsi que nous l'avons dit plus haut (n° 122), jouit de cette propriété que l'on peut, pour le calcul des annuités sur deux têtes, remplacer les deux têtes par une seule, d'un âge convenablement choisi. Voici comment on arrive à cette substitution.

La formule qui représente le nombre des vivants, quand on admet l'hypothèse de Gompertz, est

$$f(x) = dg^{q^x}.$$

La probabilité qu'ont deux personnes d'âges a et b d'exister encore toutes les deux dans n années est alors

$$\frac{f(a+n)}{f(a)} \frac{f(b+n)}{f(b)} = g^{(q^n-1)(q^a+q^b)}.$$

Or la probabilité qu'une seule tête d'âge c existera elle-même dans n années est représentée par

$$g^{(q^n-1)q^c}.$$

Si donc on détermine l'âge c de manière à satisfaire à la relation

$$q^c = q^a + q^b, \tag{57}$$

la probabilité de vie de cette tête auxiliaire *à une époque quelconque* sera égale à la probabilité de vie des deux autres têtes ensemble. On voit donc, en se reportant à la formule (55), qui donne la valeur de l'annuité sur les deux têtes proposées, que cette valeur sera égale à l'annuité X_c sur la tête d'âge c. L'âge c se détermine facilement par la formule (57), et l'on remarquera qu'il ne dépend que de la constante q, et nullement des deux autres constantes d et g.

Nous ne donnons pas d'exemple à ce sujet, parce que, en pratique, la formule de Gompertz ne donne pas de résultats assez exacts pour le calcul des annuités sur deux têtes, sauf dans la période de la vieillesse. On ne peut réellement l'employer que pour le calcul des annuités temporaires ou pour des interpolations faites dans une courte période de l'existence.

157. On peut mettre la formule (57) sous une autre forme, qui permet de constater quelques particularités curieuses relativement à la fixation de l'âge c. Soit a le plus grand des deux âges a et b; la formule (57) donne

$$q^{c-a} = 1 + q^{b-a} = 1 + \frac{1}{q^{a-b}},$$

$$c = a + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{q^{a-b}}\right)}{\log q}.$$

Quand les âges a et b sont égaux, l'âge c les dépasse donc d'une quantité représentée par $\frac{\log 2}{\log q}$. Si q était constant pour toute la durée de la vie, c'est-à-dire si la loi de Gompertz s'appliquait réellement à la mortalité humaine, cette quantité serait également constante ; mais, comme la quantité q augmente elle-même avec l'âge, l'excès de c sur l'âge commun des deux têtes ira en diminuant à mesure que cet âge commun deviendra plus élevé : c'est ce qui arrive en réalité.

Lorsque la différence $a - b$ va en augmentant, l'excès de c sur l'âge le plus élevé a diminue constamment et tend vers zéro; c'est-à-dire que, quand la différence des deux âges est très-grande et que l'une des têtes est, par conséquent, très-âgée, l'annuité sur les deux têtes se rapproche, de plus en plus, de l'annuité sur la tête la plus âgée seule.

Calcul des annuités sur deux têtes par la formule de Makeham.

158. La formule de Makeham, ainsi que nous l'avons dit plus haut (n° 125), jouit de cette propriété, presque aussi

simple que celle de Gompertz, que l'on peut, pour le calcul des annuités sur deux têtes, remplacer les deux têtes par deux autres d'un âge égal, pourvu que cet âge soit convenablement choisi. On arrive à cette substitution par un calcul analogue à celui qui fait l'objet du n° 156.

La formule de Makeham étant

$$\frac{k}{\alpha^x} g^{q^x},$$

la probabilité que deux personnes d'âges a et b existeront encore toutes les deux dans n années est

$$\alpha^{2n} g^{(q^n-1)(q^a+q^b)}.$$

La même probabilité, pour deux personnes ayant un âge égal à b, ressort à

$$\alpha^{2n} g^{(q^n-1)\,2q^c}.$$

Si donc on détermine l'âge c de manière à satisfaire à la relation

$$(58) \qquad 2q^c = q^a + q^b,$$

l'annuité $X_{c,c}$ sur les deux têtes auxiliaires sera égal à l'annuité $X_{a,b}$ sur les deux têtes proposées.

La recherche de cette annuité est ainsi très-simplifiée, parce qu'il suffit d'avoir à sa disposition une Table toute calculée d'annuités sur deux têtes d'âge égal, table qui présente un développement cinquante fois moins considérable qu'une Table d'annuités sur deux têtes d'âges quelconques.

On remarquera, comme tout à l'heure, que la détermination de c ne dépend que de q, et nullement de k, de α, ni de g. Ajoutons que, pour toutes les Tables de mortalité, si l'on ne veut pas faire le calcul exact de la détermination de q, on peut, avec une assez grande approximation, adopter la valeur très-simple

$$\log q = 0,04.$$

Exemple. — Calculer, par la formule de Makeham, l'annuité sur deux têtes, âgées de 30 et de 50 ans.

La formule (58) donne

$$2q^c = q^{30} + q^{50},$$

$$q^{c-30} = \frac{1 + q^{20}}{2},$$

$$c - 30 = \frac{\log\left(\frac{1 + q^{20}}{2}\right)}{\log q},$$

et, en adoptant $\log q = 0{,}04$,

$$c - 30 = \frac{0{,}5628018}{0{,}04} = 14{,}07,$$

$$c = 44{,}07.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer l'annuité sur deux têtes d'âge 44,07. Or, on trouve dans une Table d'annuités sur des têtes d'âge égal (Table H^{M}, 4 pour 100)

$$X_{44} = 11{,}3447,$$

$$X_{45} = 11{,}0760;$$

d'où

$$X_{(44,07)} = X_{30,50} = 11{,}3259.$$

Comme vérification, on peut se reporter à la Table d'annuités sur deux têtes, calculée directement, et l'on y trouvera

$$X_{30,50} = 11{,}3320.$$

On voit donc qu'on obtient ainsi à peu près deux décimales exactes, ce qui est bien suffisant dans la plupart des cas usuels.

159. On peut faire sur la détermination de l'âge c des remarques analogues à celles que nous avons faites dans le n° **157**, à propos de la formule de Gompertz; on arrive ici à des propriétés plus nettes, parce que la formule de Makeham représente mieux la véritable loi de la mortalité.

Reprenons la formule (58)

$$2q^c = q^a + q^b$$

et supposons $a > b$; on aura

$$q^{c-a} = 1\,2 - q^{b-a} = 1 + \frac{1}{q^{a-b}},$$

$$c = a - \frac{\log 2}{\log q} + \frac{\log\left(1 + \frac{1}{q^{c-b}}\right)}{\log q},$$

et, en tenant compte de ce que l'on a très-approximativement $\log 2 = 0,3$ et $\log q = 0,4$,

$$c = a - 7,5 + 25 \log\left(1 + \frac{1}{q^{a-b}}\right).$$

Ainsi l'âge c est égal à l'âge a, moins sept ans et demi, plus une quantité, qui va en diminuant à mesure qu'augmente la différence $a - b$.

Lorsque les âges a et b sont égaux, cette quantité est précisément $7\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que l'âge c est égal à l'âge commun; lorsque la différence des âges a et b augmente, l'âge c se tient toujours entre l'âge le plus grand a et cet âge, diminué de $7\frac{1}{2}$, se rapprochant de plus en plus de cette dernière limite. Suivant que la différence des âges a et b atteint 20, 25, 30, 50 ans, l'âge c ne dépasse plus cette limite $(a - 7,5)$ que de 1 an 6 dixièmes; 1 an; 6 dixièmes d'année; 1 dixième d'année. Cela peut du reste se vérifier, indépendamment de toute formule, quand on possède des Tables toutes calculées d'annuités sur une et sur deux têtes.

Annuités continues sur deux têtes.

160. On peut appliquer la méthode continue au calcul des annuités sur deux têtes, aussi bien que sur une tête. En raisonnant comme au n° 153, on trouvera, comme correspondant à la formule (51), la suivante, qui donne la valeur des annuités continues sur deux têtes,

$$(59) \qquad \overline{X}_{a,b} = \int_0^\infty \frac{f(a+x)\,f(b+x)}{f(a)\,f(b)}(1+t)^{-x}\,dx.$$

On peut également, par des intégrations approchées, obtenir avec une certaine approximation la valeur de l'annuité continue $\overline{X}_{a-b}$ en fonction de l'annuité ordinaire X_{a-b}. En désignant les taux instantanés de mortalité par τ_a et τ_b, cette formule est la suivante :

$$\overline{X}_{a,b} = X_{a,b} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\tau_a + \tau_b + \rho). \tag{60}$$

La formule serait composée de la même manière si, au lieu de deux têtes a et b, on cherchait l'annuité sur un nombre quelconque de têtes. Ainsi, l'annuité continue sur deux ou sur plusieurs têtes est toujours plus grande que l'annuité ordinaire; la différence est environ $0^{fr},495$, comme dans les assurances sur une seule tête.

Exemple. — Calculer la valeur de l'annuité continue, sur deux têtes âgées de 30 et 40 ans, d'après la Table H^M et l'intérêt $t = 0,04$.

L'annuité ordinaire $X_{30,40}$ est égale à 13,232; et l'on a en outre

$$\tau_{30} = 0,0076,$$
$$\tau_{40} = 0,0102,$$
$$\rho = 0,0392,$$

ce qui conduit à

$$X_{30,40} = 13,728.$$

161. *Annuités sur deux têtes payables jusqu'au dernier décès.* — La valeur de l'annuité sur deux têtes, A et B, payable jusqu'au dernier décès, est égale à l'annuité sur la tête A, plus l'annuité sur la tête B, moins l'annuité sur les deux têtes réunies, payable jusqu'au premier décès seulement. En la désignant par $X_{\overline{a-b}}$, on aura donc

$$X_{\overline{a,b}} = X_a + X_b - X_{a,b}. \tag{61}$$

Cette relation subsiste, soit pour les annuités ordinaires, soit pour les annuités continues.

Exemple. — Quelle est la valeur de l'annuité sur deux

têtes de 30 et de 40 ans, payable jusqu'au dernier décès?

$$X_{30} \text{ est égal à } 17,1309$$
$$X_{40} \quad \text{»} \quad 15,1347$$
$$X_{30,40} \quad \text{»} \quad 13,2324;$$

d'où l'on conclut

$$X_{\overline{30,40}} = 19,0332.$$

162. *Annuités payables par fractions d'année.* — Quand l'annuité sur deux ou plusieurs têtes est payable par semestres, par trimestres ou par fractions quelconques de l'année, on peut appliquer, comme pour les annuités sur une tête, la formule (**53**), sans y faire d'autre modification que de remplacer τ par $\tau_a + \tau_b + \ldots$, somme des taux instantanés de mortalité correspondant à chacune des têtes dont il s'agit.

Exemple. — L'annuité ordinaire $X_{30,40}$ a pour valeur 13,232; la même annuité, payable par semestres, sera

$$13,232 + \frac{1}{4} - \frac{1}{16}(0,0076 + 0,0102 + 0,0392) = 13,478;$$

et la même annuité, payable par trimestres, sera

$$13,232 + \frac{3}{8} - \frac{5}{64}(0,0076 + 0,0102 + 0,0392) = 13,603.$$

Calcul approché des annuités viagères sur une ou sur plusieurs têtes.

163. *Annuités sur une tête.* — On peut, par un calcul rapide, se procurer une valeur très-approchée des annuités sur une ou plusieurs têtes (*voir* à ce sujet le travail de M. Achard dans le *Journal des Actuaires français*, t. I, 1872).

Examinons d'abord le cas où il n'y a qu'une seule tête en jeu.

Il faut prendre pour inconnue intermédiaire une sorte d'annuité (quoique l'expression cesse alors d'être exacte), dans laquelle les termes, au lieu d'être payables une fois par an,

comme à l'ordinaire, ou plusieurs fois par an, comme dans le n° 154, ne sont payables qu'une fois en plusieurs années; il est bien entendu qu'alors chaque terme est égal à autant de fois 1 franc qu'il y a d'années dans la période choisie. Cette annuité se calcule beaucoup plus rapidement que l'annuité ordinaire, et une relation très-simple, que nous connaissons déjà, permet, quand on en connaît la valeur, d'obtenir avec grande approximation la valeur de l'annuité ordinaire.

La valeur de l'annuité payable seulement par périodes de h années est, en adoptant pour cette annuité la notation $\overset{\frac{1}{h}}{}\mathrm{X}$,

$$(62)\qquad \overset{\frac{1}{h}}{}\mathrm{X}_a = \frac{f(a+h)}{f(a)}\,\frac{h}{(1+t)^h} + \frac{f(a+2h)}{f(a)}\,\frac{h}{(1+t)^{2h}} + \ldots,$$

cette série étant prolongée jusqu'à ce qu'on rencontre un terme nul. Si l'on emploie la Table de commutation, cette valeur revient à

$$\overset{\frac{1}{h}}{}\mathrm{X}_a = h\,\frac{\mathrm{D}_{a+h} + \mathrm{D}_{a+2h} + \ldots}{\mathrm{D}_a}.$$

Quant à la relation entre $\overset{\frac{1}{h}}{}\mathrm{X}$ et X, elle découle de la formule (53) en y changeant m en $\frac{1}{h}$. Cette formule donne alors

$$\overset{\frac{1}{h}}{}\mathrm{X} = \mathrm{X} + \frac{1-h}{2} - \frac{1-h^2}{12}(\tau+\rho),$$

$$(63)\qquad \mathrm{X} = \overset{\frac{1}{h}}{}\mathrm{X} + \frac{h-1}{2} - \frac{h^2-1}{12}(\tau+\rho),$$

τ et ρ étant les taux continus de mortalité et d'intérêt. La valeur de h peut être prise arbitrairement : plus on la prendra élevée et plus le calcul sera rapide, mais en même temps moins on obtiendra d'approximation. Si l'on prend $h=1$, on retombe sur la formule ordinaire

$$\mathrm{X}_a = \frac{\mathrm{D}_{a+1} + \mathrm{D}_{a+2} + \ldots}{\mathrm{D}_a} = \frac{\mathrm{N}_a}{\mathrm{D}_a},$$

déjà établie au n° 146. En prenant $h=11$ ou $h=19$, on arrive à un calcul rapide et suffisamment exact.

Exemple. — Calculer l'annuité sur une tête de 30 ans, en prenant $h = 19$.

La formule ci-dessus donne

$$X_{30} = 19 \frac{D_{49} + D_{68} + D_{87}}{D_{30}} + 9 - 30(\tau + \rho);$$

substituant les valeurs

$$D_{49} = 10807,$$
$$D_{68} = 2967,$$
$$D_{87} = 110,$$
$$D_{30} = 27707,$$
$$\tau = 0,00761,$$
$$\rho = 0,0392,$$

on obtient

$$X_{30} = 9,521 + 9 - 1,404 = 17,117.$$

La valeur exacte donnée par les Tables (qui sont calculées au moyen de $h = 1$) est 17,131.

Si l'on répète le même calcul en prenant $h = 11$, on aura

$$X_{30} = 11 \frac{D_{41} + D_{52} + D_{63} + D_{74} + D_{85} + D_{96}}{D_{30}} + 5 - 10(\tau + \rho)$$
$$= 12,594 + 6 - 0,468 = 17,126,$$

valeur qui est notablement plus approchée que la précédente, parce que h a été choisi plus petit.

164. *Annuités sur plusieurs têtes.* — Quand il s'agit d'annuités sur plusieurs têtes, on arrive à une formule analogue. L'annuité ${}^{\frac{1}{h}}X_{ab}$ a pour valeur

$$(64) \qquad {}^{\frac{1}{h}}X_{ab} = h \frac{f(a+h)f(b+h)}{f(a)f(b)} \frac{1}{(1+t)^h} + h \frac{f(a+2h)f(b+2h)}{f(a)f(b)} \frac{1}{(1+t)^{2h}} + \ldots,$$

ce qui peut encore se mettre sous la forme

$${}^{\frac{1}{h}}X_{a,b} = \frac{h}{{}_aD_b} [D_{a+h}D_{b+h}(1+t)^h + D_{a+2h}D_{b+2h}(1+t)^{2h} + \ldots],$$

et la relation entre les deux annuités est la même que la relation (63), pourvu que τ, au lieu de représenter le taux continu de mortalité d'une seule tête, représente la somme des taux continus de mortalité de toutes les têtes en jeu.

Exemple. — Calculer l'annuité sur deux têtes âgées de 30 et de 50 ans, en prenant $h = 10$.

La formule donne

$$\begin{aligned}{}^{\frac{1}{10}}X_{30,50} = \frac{10}{D_{30}D_{50}}\big[D_{40}D_{60}(1+t)^{10} + D_{50}D_{70}(1+t)^{20} \\ + D_{60}D_{80}(1+t)^{30} + D_{70}D_{90}(1+t)^{40}\big] = 7{,}348,\end{aligned}$$

et l'on a, d'autre part,

$$\begin{aligned}X_{30,50} &= {}^{\frac{1}{10}}X + 4{,}5 - \frac{99}{12}(0{,}00761 + 0{,}01570 - 0{,}03922) \\ &= 7{,}348 + 4{,}5 - 0{,}515 = 11{,}333.\end{aligned}$$

Or la Table d'annuités toute calculée donne pour cette valeur 11,3320.

Annuités différées.

165. *Annuités sur une seule tête.* — Une annuité est dite *différée* quand son payement ne doit commencer qu'après un certain nombre d'années. Soit X_a^n l'annuité différée de n années, sur une tête âgée actuellement de a. Cette annuité reposera, dans n années, sur une tête d'âge $a+n$ et aura alors pour valeur X_{a+n}; il suffit de multiplier cette quantité par Q_a^n pour la ramener à sa valeur actuelle, qui est ainsi

$$(65) \qquad X_a^n = X_{a+n}Q_a^n = \frac{N_{a+n}}{D_a}.$$

Exemple. — Calculer l'annuité reposant sur une tête de 30 ans et différée de 10 ans.

La valeur cherchée est égale à

$$X_{30}^{10} = X_{40}Q_{30}^{10} = 15{,}135\,\frac{82284}{89865}\,\frac{1}{1{,}04^{10}} = 9{,}362,$$

ou, si l'on préfère se servir de la Table de commutation,

$$X_{30}^{10} = \frac{N_{40}}{D_{30}} = \frac{259391,5}{27707,1} = 9,362.$$

166. *Annuités sur deux têtes.* — Il en est de même de l'annuité différée sur deux têtes; au lieu de $X_{a,b}$ ou de $X_{\overline{a,b}}$, sa valeur actuelle, si elle est différée de n années, sera, suivant le cas,

(66) $$X_{a,b}^{n} = X_{a+n,\,b+n}\,Q_{a,b}^{n},$$

ou bien

(67) $$X_{\overline{a,b}}^{n} = X_{\overline{a+n,\,b+n}}\,Q_{\overline{a,b}}^{n}.$$

Annuités temporaires.

167. Une annuité est dite *temporaire* quand elle ne doit être payée que pendant un certain nombre d'années, même en cas de vie de la tête sur laquelle elle repose. Elle est égale à une annuité payable pendant toute la vie, moins une annuité différée du même nombre d'années. Ainsi, en la représentant par ${}_nX_a$, s'il s'agit d'une seule tête, on aura

(68) $${}_nX_a = X_a - X_a^n = \frac{N_a - N_{a+n}}{D_a},$$

et, en la représentant par ${}_nX_{a,b}$ ou par ${}_nX_{\overline{a,b}}$, s'il s'agit de deux têtes au premier ou au second décès, on aura de même

(69) $${}_nX_{a,b} = X_{a,b} - X_{a,b}^n,$$

et

(70) $${}_nX_{\overline{a,b}} = X_{\overline{a,b}} - X_{\overline{a,b}}^n.$$

Exemple. — Une annuité temporaire de 10 ans, sur une tête de 30 ans, a pour valeur

$${}_{10}X_{30} = X_{30} - X_{30}^{10} = 17,131 - 9,362 = 7,769,$$

ou bien

$${}_{10}X_{30} = \frac{N_{30} - N_{40}}{D_{30}} = \frac{474646,5 - 259391,5}{27707,1} = 7,769.$$

Annuités temporaires différées.

168. Une annuité temporaire peut être en même temps différée; s'il s'agit d'une seule tête, c'est alors la valeur actuelle d'une série de sommes payables annuellement pendant n années, le premier payement commençant dans m années et tous les payements étant subordonnés à l'existence d'une tête ayant aujourd'hui l'âge a. On peut la représenter par ${}_nX^m_a$, et sa valeur ressort à

$$(71) \qquad {}_nX^m_a = X^m_a - X^{m+n}_a = \frac{N_{a+m} - N_{a+m+n}}{D_a}.$$

Il en est de même s'il s'agit de deux têtes, soit au premier, soit au second décès, et l'on a pareillement

$$(72) \qquad {}_nX^m_{a,b} = X^m_{a,b} - X^{m+n}_{a,b}$$

et

$$(73) \qquad {}_nX^m_{\overline{a,b}} = X^m_{\overline{a,b}} - X^{m+n}_{\overline{a,b}}.$$

Exemple. — Une annuité temporaire de 10 ans, différée de 5 ans, sur une tête de 30 ans, a pour valeur

$${}_{10}X^5_{30} = X^5_{30} - X^{15}_{30} = X_{35}\,Q^5_{30} - X_{45}\,Q^{15}_{30} = 12,782 - 6,692 = 6,090,$$

ou bien, en se servant de la Table de commutation,

$${}_{10}X^5_{30} = \frac{N_{35} - N_{45}}{D_{30}} = \frac{354142,4 - 185427,5}{27707,1} = 6,090.$$

Annuités sur plus de deux têtes.

169. La méthode exposée au numéro **155** s'applique à la recherche des annuités sur un nombre quelconque de têtes. Ainsi, s'il s'agit de trois têtes, d'âges a, b, c, on aura, au lieu de la relation (56), la relation analogue

$$(74) \qquad X_{a,b,c} = (1 + X_{a+1,b+1,c+1})Q'_{a,b,c}.$$

Cette relation permettrait de calculer, de proche en proche, toute une Table d'annuités sur trois têtes, ou sur un nombre quelconque de têtes.

Ces Tables n'ont jamais été établies, car elles nécessiteraient un travail excessivement long, puisque, pour toutes les combinaisons que peuvent offrir seulement trois têtes, il faudrait calculer cent mille nombres différents.

170. *Calcul des annuités sur plusieurs têtes par la formule de Gompertz, ou celle de Makeham.* — On peut calculer les annuités sur plus de deux têtes, soit par la formule de Gompertz, soit par celle de Makeham, en appliquant les procédés exposés aux numéros 156 et 158.

Si l'on veut appliquer la formule de Gompertz, il faudra déterminer un âge auxiliaire d, de manière à satisfaire à la relation

$$q^d = q^a + q^b + q^c + \ldots,$$

et l'annuité X_d sera égale à l'annuité cherchée $X_{a,b,c,\ldots}$.

Si l'on veut appliquer la formule de Makeham, on déterminera d, de manière à satisfaire, s'il s'agit de trois têtes, à la relation

$$3q^d = q^a + q^b + q^c,$$

et l'on aura

$$X_{d,d,d} = X_{a,b,c};$$

mais, quand il s'agit de plus de deux têtes, ces méthodes restent sans application pratique : la première, parce que la loi de Gompertz n'est pas assez exacte; la seconde, parce qu'il faudrait posséder des Tables d'annuités sur trois têtes égales, et que l'on n'en possède pas, au moins pour les Tables de mortalité usitées. Le calcul de ces Tables d'annuités ne serait, du reste, pas très-long, en faisant usage de la formule (74), dans laquelle on prendrait, pour point de départ, $a=b=c=\ldots$ l'âge le plus avancé de la Table de mortalité.

171. *Annuités continues et autres sur plus de deux têtes.* — Tout ce qui a été dit dans les numéros 160 à 168 pour le cas

de deux têtes peut s'adapter également au cas de trois et de plus de trois têtes; mais ces calculs restent sans application pratique.

172. *Méthode de Simpson. — Réduction de deux têtes à une seule.* — Toutes les fois que l'on a plus de deux têtes à considérer, on peut en éliminer une ou plusieurs, en employant la méthode de Simpson. Cette méthode, qui, sans donner des résultats parfaitement exacts, est très-commode dans les applications, consiste à remplacer les chances d'existence d'un groupe de deux têtes par les chances d'existence d'une seule tête, d'un âge convenablement choisi. Elle ne consiste donc, au fond, que dans l'application partielle de la méthode de Gompertz. En effet, l'âge de la tête auxiliaire que l'on introduit peut se déterminer soit par la méthode de Gompertz (n° 156) et par la formule (57), soit, si l'on possède des Tables toutes calculées d'annuités sur deux têtes, par la simple inspection de ces Tables.

Premier exemple. — Calculer, par la méthode de Simpson, l'annuité sur trois têtes, âgées de 20, 30 et 40 ans.

On peut choisir, pour faire la première élimination, les deux têtes que l'on veut. Supposons que l'on choisisse les deux têtes les plus âgées; on pourra déterminer l'âge d de la tête auxiliaire qui doit les remplacer par la formule (57)

$$q^d = q^{30} + q^{40}.$$

Si l'on préfère employer une Table toute calculée d'annuités sur deux têtes, on y cherchera $X_{30,40}$, que l'on trouvera égal (pour la Table H^M et le taux 4 pour 100) à 13,2324. Passant alors à une Table d'annuités sur une tête, on y trouve les valeurs suivantes :

$$X_{47} = 13,3563,$$
$$X_{48} = 13,0940,$$

d'où l'on conclut que l'âge d de la tête auxiliaire est compris entre 47 et 48 ans et qu'il peut être fixé à 47,49.

Il y a trois manières de faire le calcul; car, au lieu de commencer par réduire à une seule les deux têtes de 30 et 40 ans, on pouvait faire la même opération sur celles de 20 et 30 ans, ou sur celles de 20 et 40 ans: en faisant le calcul des trois manières, la divergence des résultats donnera une idée du degré d'approximation obtenu par cette méthode d'élimination.

Si l'on groupe ensemble les deux têtes de 30 et 40 ans, nous venons de voir qu'on pouvait les remplacer par une seule tête de 47,49 années. L'annuité cherchée sur les trois têtes serait ainsi égale à une annuité sur deux têtes, âgées de 20 et de 47,49 années. Or on trouvera, dans une Table d'annuités sur deux têtes,

$$X_{20,47} = 12,3047,$$
$$X_{20,48} = 12,0804;$$

d'où l'on conclut pour l'annuité cherchée 12,1948.

Si l'on opère de même et au moyen de la Table d'annuités toutes calculées, en groupant ensemble les deux têtes de 20 et de 40 ans, l'annuité cherchée se réduit à une annuité sur deux têtes âgées de 30 et de 45,70 années; elle a pour valeur 12,2274.

Si enfin on groupe ensemble les deux têtes de 20 et 30 ans, l'annuité cherchée se réduit à une annuité sur deux têtes, âgées de 40 et de 39,92 années, et elle a pour valeur 12,3569.

Ces trois résultats étant notablement divergents, on peut en conclure que ce procédé de groupement ne conduit pas à une grande approximation.

Second exemple. — Calculer l'annuité sur quatre têtes âgées de 30, 40, 50 et 60 ans.

On a

$$X_{50,60} = 7,9240,$$
$$X_{61} = 8,1845,$$
$$X_{65} = 7,8703;$$

d'où l'on conclut que l'on peut substituer aux deux dernières têtes une tête auxiliaire de 64,82 années. On peut donc rempla-

cer les quatre têtes proposées par deux seulement, âgées l'une de 47,49, l'autre de 64,82 années. En se reportant à la Table d'annuités sur deux têtes, on trouvera par un calcul facile, pour l'annuité sur ces deux têtes, ou pour l'annuité sur les quatre têtes proposées, 6,9922. Il est facile de comprendre, d'après ce qu'on a vu dans l'exemple précédent, que l'on peut à peine compter ici sur une décimale exacte.

§ II. — PRIMES UNIQUES DES OPÉRATIONS FONDAMENTALES.

Toutes les opérations d'assurances sur la vie peuvent se ramener, pour ce qui concerne les rentes, à un simple décompte d'annuités, et, pour ce qui concerne les capitaux, à trois opérations fondamentales; ces trois opérations sont l'assurance d'un capital payable après un décès, ou après le premier décès de deux personnes désignées, ou après un décès survenant du vivant d'une personne désignée. Nous allons donc calculer d'abord, par une analyse directe, la valeur actuelle de l'engagement que prend la Compagnie dans chacun de ces trois cas; cette valeur donnera la *prime unique*, ou le prix que l'assuré doit payer en contractant son assurance. Pour les autres opérations, cette même prime unique s'obtiendra par des transformations diverses.

173. *Valeur actuelle d'une somme payable après un décès.* — Désignons par P_a la valeur actuelle d'une somme de 1 franc que l'on doit payer au décès d'une tête d'âge a, à quelque époque qu'ait lieu le décès. On peut calculer la valeur de P_a de plusieurs manières; la plus exacte est une application de la méthode continue, exposée plus haut.

Première méthode (*méthode continue*). — La probabilité que la tête en question s'éteindra précisément pendant le petit intervalle de temps dx compris entre les époques marquées par x et $x + dx$ est égale à la probabilité qu'elle vivra encore à l'époque x, multipliée par la probabilité qu'elle ne vivra plus à

l'époque $x + dx$, c'est-à-dire à

$$\frac{f(a+x)}{f(a)}\left(1 - \frac{f(a+x+dx)}{f(a+x)}\right) = -\frac{df(a+x)}{f(a)}.$$

En multipliant cette probabilité par la valeur actuelle $(1+t)^{-x}$ de 1 franc payable au bout du temps x, on obtiendra un des éléments de la valeur de P_a; et, en ajoutant tous ces éléments au moyen de l'intégration, on aura la valeur totale de P_a

$$(75) \qquad P_a = -\int_{x=0}^{x=\infty} \frac{df(a+x)}{f(a)}(1+t)^{-x}.$$

Pour calculer cette intégrale, on peut intégrer par parties, ce qui donne

$$P_a = \frac{1}{f(a)}\left[f(a) - \log\text{nép}\,(1+t)\int_0^\infty f(a+x)(1+t)^{-x}dx\right].$$

L'intégrale qui figure dans cette formule n'est autre que l'annuité continue $\overline{X_a}$, de sorte que l'on a

$$(76) \qquad P_a = 1 - \overline{X_a}\log\text{nép}\,(1+t);$$

on a encore, en développant $\log\text{nép}\,(1+t)$ par la formule $t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots$,

$$(77) \qquad P_a = 1 - t\overline{X_a} + \frac{t^2}{2}\overline{X_a} - \ldots.$$

Exemple. — Si l'on prend $a = 30$ ans, $\overline{X_{30}}$ est égal à 17,6269, et, par conséquent, P_{30} est égal à

$$1 - 17{,}6269 \log\text{nép}\, 1{,}04 = 0^{\text{fr}},30866.$$

Calculée par la formule (72), cette valeur se présenterait sous la forme du développement suivant :

$$1 - 0{,}70508 + 0{,}01410 - 0{,}00037 + 0{,}0000113.$$

En prenant les deux premiers termes seulement, on obtient 0,29492 ; en prenant les trois premiers, 0,30902 ; en prenant les quatre premiers, 0,30865 ; en prenant les cinq premiers, 0,30866 ; etc.

Dans la valeur ainsi calculée, on suppose, comme on l'a vu par la mise en équation, que la somme assurée est payée au moment même du décès.

Deuxième méthode. — On prend pour point de départ l'annuité ordinaire, et l'on suppose que la somme de 1 franc ne doit être payée qu'à la fin de l'année dans laquelle a lieu le décès. La probabilité que le décès aura lieu pendant une année quelconque, la sixième par exemple, est

$$\frac{f(a+5)-f(a+6)}{f(a)};$$

et, comme la somme de 1 franc qui doit être payée dans cette éventualité n'a pour valeur actuelle que $(1+t)^{-6}$, l'élément correspondant de la valeur de P_a est

$$\frac{f(a+5)-f(a+6)}{f(a)}(1+t)^{-6}.$$

La valeur totale de P_a sera donc la somme de tous les éléments analogues, somme qui ressort, tout calcul fait, à

(78) $$P_a = \frac{1-tX_a}{1+t} = \frac{M_a}{D_a}.$$

Si l'on suppose que la somme de 1 franc doit être payée, non plus à la fin, mais au milieu de l'année dans laquelle a lieu le décès, ce qui, en moyenne, équivaut à peu près à la réalité, cette valeur doit être multipliée par $(1+t)^{\frac{1}{2}}$, et l'on obtient

(79) $$P_a = \frac{1-tX_a}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si enfin on suppose que la somme de 1 franc sera payée au commencement de l'année dans le cours de laquelle a lieu le décès, il faut multiplier la première valeur par $1+t$, et l'on obtient

(80) $$P_a = 1-tX_a.$$

Exemple. — Si l'on reprend l'exemple déjà traité ci-dessus,

c'est-à-dire l'âge de 30 ans et la Table H^M, il faut faire $X_{30} = 17,1309$, et l'on trouve comme valeur de P_a :

0,302658, si la somme de 1 franc doit être payée à la fin de l'année dans laquelle le décès arrive;

0,308652, si elle doit être payée au milieu de l'année.

0,314764, si elle doit être payée au commencement de l'année.

On se rappelle que la valeur exacte de P_a, calculée au moyen de l'annuité continue, ressortait à 0,3086585; ce nombre est sensiblement égal à la valeur obtenue dans la deuxième hypothèse au moyen de l'annuité ordinaire.

En pratique, la plupart des Compagnies françaises d'assurances calculent P_a d'après la troisième hypothèse, c'est-à-dire comme si leurs sinistres étaient payés au commencement de l'année dans laquelle ils arrivent; elles profitent ainsi, en moyenne, de six mois d'intérêt sur les sommes payées par elles par suite de décès. D'un autre côté, il faut remarquer qu'elles sont obligées d'avoir toujours à leur disposition, pour payer les sinistres aussitôt qu'ils se produisent, un capital liquide, qui ne leur rapporte que peu ou point d'intérêts. Si ce capital liquide, gardé en réserve, était précisément égal à la moitié du montant annuel des sinistres, le mode de calcul adopté pour P_a compenserait exactement cette obligation; mais, comme il est toujours moins élevé, il reste un certain avantage pour la Compagnie. Il suit de là qu'il serait tout à fait puéril de chercher à calculer P_a avec une grande exactitude; il est largement suffisant d'en obtenir la valeur avec trois décimales. La valeur obtenue pour P_a ne sera ainsi ni plus ni moins exacte que si l'on avait cherché 5 ou 6 décimales; on aura seulement réservé à la Compagnie un avantage un peu plus ou un peu moins grand, et nous venons de voir que cet avantage n'était établi que sur une base arbitraire.

Si l'annuité X_a ne devait servir que pour le calcul de P_a, il serait également inutile de calculer sa valeur avec plus de trois décimales; mais, comme nous le verrons plus loin, l'annuité est encore employée pour le calcul d'autres combinai-

sons, notamment des assurances de survie, pour lesquelles on peut avoir besoin de plus de trois décimales.

Les Compagnies d'assurances anglaises n'établissent pas leurs calculs de la même manière; elles supposent que le capital est payé seulement à la fin de l'année dans laquelle arrive le décès, et elles font, par conséquent, usage de la formule (78). C'est sur cette base que sont calculées d'avance les Tables de commutation et les Tables de résultats, établies par les Actuaires anglais, dont nous reproduisons des extraits à la fin du volume. Cette différence n'a pas grande importance dans la pratique; car, ainsi que nous le verrons plus loin, le calcul ne donne jamais que des *primes pures*, c'est-à-dire des primes théoriques, et l'on est obligé de les augmenter ou de les diminuer, suivant un système fort arbitraire, pour établir les Tarifs que l'on doit mettre en pratique.

Dans les exemples que nous donnerons par la suite, nous admettrons toujours, à moins d'indication contraire, que l'on emploie la Table de mortalité H^M, le taux d'intérêt de 4 pour 100, et qu'on suppose le capital payé en fin d'année, ce qui entraîne l'adoption de la formule (78) et des formules analogues (84) et (90).

174. *Influence du taux de l'intérêt.* — Nous avons dit au n° **143** que la valeur réelle de l'annuité était plus faible que celle qu'indique le calcul, parce que le taux réel de l'intérêt est plus fort que le taux adopté. Il est bon de se rendre compte de l'influence que cela peut exercer sur la valeur actuelle d'une somme payable après un décès, c'est-à-dire sur la valeur de P_a, qui est calculée en pratique par les formules (80) et (78).

Quand le taux t augmente, la valeur de l'annuité X_a diminue, mais suivant une progression moins rapide, de sorte que le produit tX_a augmente encore, et que la prime unique P_a diminue. Le tableau ci-dessous, dressé pour les âges de 30 et de 50 ans, montre que cette diminution est assez rapide.

Primes uniques assurant un capital de 10000 *francs, d'après la Table* H^M *et à divers taux d'intérêt.*

(Capital payable à la fin de l'année.)

AGE.	3 %.	3 ½.	4 %.	4 ½.	5 %.	6 %.
30 ans..............	3,922 fr	3,434 fr	3,026 fr	2,684 fr	2,394 fr	1,940 fr
50 ans..............	5,661	5,202	4,794	4,429	4,103	3,548

Ainsi, quand le taux d'intérêt augmente de $\frac{1}{2}$ pour 100, la valeur de la prime unique pour l'âge de 30 ans diminue d'environ 10 pour 100, et la valeur de la prime unique pour l'âge de 50 ans diminue d'environ 8 pour 100. L'adoption d'un taux trop faible ne peut donc entraîner pour la Compagnie qu'un bénéfice de placement.

175. *Valeur d'une somme payable au premier décès de deux personnes désignées.* — Supposons que la somme de 1 franc doit être payée au premier décès de deux personnes d'âges a et b, et cherchons la valeur actuelle $P_{a,b}$ de cet engagement.

Première méthode. — On peut appliquer la méthode continue en se livrant à une analyse semblable à celle du n° **172**. Pour que le payement devienne exigible, précisément pendant le laps de temps très-court dx, qui se place entre les époques x et $x+dx$, il faut que l'un des deux décès ait lieu pendant ce laps de temps, l'autre tête étant encore vivante. La probabilité que c'est le décès de B qui se présentera est $-\frac{df(b+x)}{f(b)}$, et la probabilité que A sera alors vivant est $\frac{f(a+x)}{f(a)}$; et inversement pour le décès de A et la vie de B, de sorte que la probabilité que le payement deviendra exi-

gible, précisément pendant ce temps dx, est

$$-\frac{f(a+x)df(b+x)}{f(a)f(b)}-\frac{f(b+x)df(a+x)}{f(b)f(a)},$$

ou bien

$$-\frac{1}{f(a)f(b)}d[f(a+x)f(b+x)].$$

La valeur totale actuelle de la somme cherchée est donc, en raisonnant comme au n° **163**,

$$(81)\quad P_{a,b}=\int_{x=0}^{x=\infty}-\frac{1}{f(a)f(b)}d[f(a+x)f(b+x)](1+t)^{-x}.$$

En intégrant par parties, on trouve, pour la valeur de cette intégrale,

$$(82)\qquad P_{a,b}=1-\overline{X}_{a,b}\log \text{nép}(1+t).$$

Cette formule est tout à fait analogue à la formule (76), et l'on peut, en développant log nép$(1+t)$, la mettre sous la forme suivante :

$$(83)\qquad P_{a,b}=1-t\,\overline{X}_{a,b}+\frac{t^2}{2}\overline{X}_{a,b}-\frac{t^3}{3}\overline{X}_{a,b}+\ldots.$$

Exemple. — Si l'on prend $a=30$ et $b=40$, $\overline{X}$ est égal à 13,728; et par conséquent $P_{30,40}$ est égal à

$$1-13,728\times\log \text{nép}.\ 1,04=0,461588.$$

Calculée par la formule (78), cette valeur se présenterait sous la forme du développement suivant :

$$1-0,54912+0,01098-0,00029+\ldots.$$

En prenant les deux premiers termes seulement, on obtient 0,45088; en prenant les trois premiers, 0,46186; en prenant les quatre premiers, 0,46157.

Dans la valeur ainsi calculée on suppose, comme on l'a vu par la mise en équation, que la somme assurée est payée au moment même du décès.

Deuxième méthode. — On prend pour point de départ l'annuité ordinaire, et l'on suppose que la somme de 1 franc ne

doit être payée qu'à la fin de l'année dans laquelle a lieu le décès de l'une des deux têtes. On trouve alors, comme au nº 163, que le valeur totale de $P_{a,b}$ ressort, tout calcul fait, à

$$(84) \qquad P_{a,b} = \frac{1 - t X_{a,b}}{1 + t}.$$

Si l'on suppose que la somme de 1 franc doit être payée au milieu ou au commencement de l'année dans laquelle a lieu le décès, cette même valeur devient, dans le premier cas,

$$(85) \qquad P_{a,b} = \frac{1 - t X_{a,b}}{(1 + t)^{\frac{1}{2}}},$$

et dans le second

$$(86) \qquad P_{a,b} = 1 - t X_{a,b}.$$

Exemple. — Si l'on reprend le même exemple, il faut faire $X_{30,10} = 13,232$, et l'on trouve comme valeur de $P_{30,10}$:

0,4526, si la somme de 1 franc doit être payée à la fin de l'année;

0,4616, si elle doit être payée au milieu;

0,4707, si elle doit être payée au commencement.

On se rappelle que la valeur exacte de $P_{a,b}$, calculée au moyen de l'annuité continue, ressortait à 0,461588; ce nombre est sensiblement égal à celui que l'on obtient par la seconde méthode, dans la deuxième hypothèse. Au sujet de ces diverses valeurs, nous ne pouvons que rappeler ici les observations faites au nº 173, qui s'appliquent aussi bien aux annuités sur deux têtes que sur une seule tête.

Tout ce qui a été dit au nº 174, au sujet de l'influence du taux de l'intérêt, s'applique également ici, sauf quelques modifications dans les chiffres choisis pour exemples.

176. *Valeur d'une somme payable en cas de survie.* — Supposons que la somme de 1 franc doit être payée au décès de la tête B, mais seulement dans le cas où la tête A existerait encore au moment de ce décès, et cherchons la valeur actuelle de cet engagement, valeur que l'on représente par $P_{\frac{b}{a}}$.

Première méthode (*méthode continue*). — Ainsi que nous l'avons vu tout à l'heure, la probabilité que B mourra précisément pendant l'intervalle de temps dx, et que A sera vivant à cette époque, est

$$-\frac{f(a+x)\,d\,f(b+x)}{f(a)\,f(b)}.$$

Si l'on multiplie cette quantité par $(1+t)^{-x}$, on obtient l'espérance mathématique correspondante; et, en intégrant, on arrive à la somme des espérances mathématiques, autrement dit à la valeur actuelle de l'engagement que la Compagnie a à prendre. Cette valeur est donc

$$-\int_0^\infty \frac{f(a+x)\,d\,f(b+x)}{f(a)\,f(b)}(1+t)^{-x}\,dx,$$

ce qui se réduit, en introduisant la valeur déjà connue de $\overline{X}_{a,b}$ et tout calcul fait, à

$$\text{(87)}\qquad P_{\frac{b}{a}} = -\frac{1}{f(b)}\frac{d\left[f(b)\overline{X}_{a,b}\right]}{d\,b},$$

d représentant ici la différentiation par rapport à b considéré comme variable.

On peut assez simplement calculer cette valeur avec approximation, en remarquant que l'on a, pour une fonction quelconque,

$$\frac{d\varphi(b)}{db} = \Delta\varphi(b) - \frac{1}{2}\Delta^2\varphi(b) + \frac{1}{3}\Delta^3\varphi(b) - \ldots,$$

Δ, Δ^2, Δ^3 représentant les différences premières, deuxièmes, troisièmes, etc., de $\varphi(b)$. La formule (82) devient alors

$$\text{(88)}\qquad P_{\frac{b}{a}} = -\frac{1}{f(b)}\left\{\Delta_b\left[f(b)\overline{X}_{a,b}\right] - \frac{1}{2}\Delta_b^2\left[f(b)\overline{X}_{a,b}\right] + \ldots\right\},$$

ou, à fort peu de chose près,

$$P_{\frac{b}{a}} = \frac{f(b)}{1}\left[f(b)\overline{X}_{a,b} - f(b+1)\overline{X}_{a,b+1}\right].$$

$$\text{(89)}\qquad P_{\frac{b}{a}} = \overline{X}_{a,b} - \frac{f(b+1)}{f(b)}\overline{X}_{a,b+1}.$$

Exemple. — Quelle est la prime unique assurant un capital de survie de 10000 francs, payable au décès d'une personne âgée de 40 ans, à la condition qu'une autre personne, âgée de 30 ans, soit alors vivante? Le capital est supposé payable au moment même du décès.

En raison de cette dernière clause, il faut employer la formule (89), qui est basée sur les annuités continues. En y faisant $b = 40$ et $a = 30$, on trouve

$$\begin{aligned} \overline{X}_{30,40} &= 13{,}728, \\ \overline{X}_{30,41} &= 13{,}571, \\ f(40) &= 82{,}284, \\ f(41) &= 81{,}436, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$P_{\frac{40}{30}} = 13{,}728 - \frac{81436}{82284}\, 13{,}571 = 0{,}287$$

pour une assurance de 1 franc, soit 2870 francs de prime unique pour une assurance de 10000 francs.

Deuxième méthode. — On prend pour point de départ l'annuité ordinaire, et l'on suppose que la somme de 1 franc ne doit être payée qu'à la fin de l'annuité dans laquelle arrive le décès. On trouve alors, par une analyse analogue à celle du n° 175, que la valeur actuelle de l'engagement en question ressort à

$$(90) \quad \left\{ \begin{aligned} P_{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2(1+t)} \Big[1 - t X_{a,b} - \frac{f(b+1)}{f(b)} (1 + X_{a,b+1}) \\ + \frac{f(a+1)}{f(a)} (1 + X_{a+1,b}) \Big]. \end{aligned} \right.$$

On peut remarquer que si, dans cette formule, on change a en b, et réciproquement, et que l'on ajoute les deux résultats, on aura

$$P_{\frac{a}{b}} + P_{\frac{b}{a}} = \frac{1}{1+t} (1 - t X_{a,b}).$$

Or, comme l'une des deux têtes mourra nécessairement la première, cette dernière expression doit représenter également la valeur actuelle de l'engagement que prendrait la Compagnie de payer la somme de 1 franc au premier décès,

c'est-à-dire la prime unique de l'assurance de 1 franc, payable au premier décès des deux têtes désignées. Et, en effet, on retombe précisément sur la formule (84), établie tout à l'heure au n° **175**. Nous aurions donc pu réduire à deux au lieu de trois le nombre des opérations fondamentales ou irréductibles de l'assurance sur la vie; mais nous avons préféré établir directement cette importante formule.

On peut vérifier également que, si les deux têtes sont du même âge, la prime unique de l'assurance de survie est égale à la moitié de la prime unique de l'assurance sur les deux têtes, au premier décès, ce qui devait arriver.

Si l'on voulait supposer que la somme de 1 franc doit être payée soit au milieu, soit au commencement de l'année du décès, il faudrait, comme aux n^{os} **172** et **175**, multiplier la valeur (90) soit par $(1+t)^{\frac{1}{2}}$, soit par $(1+t)$.

Exemple. — Soit $a = 30$ et $b = 40$. On a

$$X_{30,40} = 13,2324,$$
$$X_{31,40} = 13,1660,$$
$$X_{30,41} = 13,0767,$$
$$f(30) = 89865; \quad f(40) = 82284,$$
$$f(31) = 89171; \quad f(41) = 81436.$$

Substituant dans la formule (90), et effectuant les calculs, on trouve en définitive

$$P_{\frac{40}{30}} = 0^{\text{fr}},286.$$

Cette valeur est donc à très-peu près la même que celle que l'on obtient en faisant usage de l'annuité continue.

Les trois formules que nous venons d'établir permettent de calculer P_a, $P_{a,b}$ et $P_{\frac{b}{a}}$, c'est-à-dire la valeur actuelle d'un capital payable au décès, ou d'un capital payable au premier décès, ou d'un capital de survie. Ce sont les formules fondamentales de l'assurance sur la vie, et elles permettent de calculer les primes uniques relatives à toutes les opérations qui se présentent dans la pratique : ce calcul se fera, soit directement, soit en substituant à l'opération proposée deux ou

plusieurs autres opérations d'assurances produisant en définitive le même résultat. Il n'est pas nécessaire de passer dès à présent en revue toutes les combinaisons d'assurances usitées pour indiquer comment on peut les réduire aux trois opérations fondamentales étudiées dans le présent paragraphe. Nous ferons plus utilement ce travail dans le § IV, où nous calculerons à la fois les primes uniques et les primes annuelles des opérations d'assurances.

Annuités variables.

177. Nous n'avons considéré jusqu'à présent que des annuités formées d'une série de sommes égales, que l'on peut appeler *annuités constantes*. On peut considérer également des *annuités variables*, qui représenteront la valeur actuelle d'une série de sommes variables, payables, la première d'avance et les autres d'année en année, tant qu'une ou plusieurs personnes seront encore en vie.

Le cas le plus simple est celui où les sommes en question varient en progression arithmétique d'année en année, ou par périodes égales d'un certain nombre d'années. Nous allons calculer la valeur actuelle d'une annuité variable reposant sur une tête d'âge a, et composée de sommes augmentant en progression arithmétique par périodes de h années, ces sommes étant de 1 franc pendant la première période, de $1 + k$ pendant la deuxième période, $1 + 2k$ pendant la troisième période, etc., et $1 + (m - 1)k$ pendant la $m^{ième}$ et dernière période, en supposant que $n = mh$. Nous admettrons que cette annuité est payable d'avance, c'est-à-dire que la première somme de 1 franc, formant le versement de la première année, est payée immédiatement, et de même pour les suivantes.

Les versements à faire pendant la première période constituent une annuité temporaire ordinaire, payable d'avance, et les versements à faire pendant les autres périodes constituent des annuités temporaires et différées. La valeur de l'ensemble est donc la suivante :

Pour la première période :

$$1 + {}_{h-1}X_a = 1 + \frac{N_a - N_{a+h-1}}{D_a};$$

Pour la deuxième période :

$$(1+k)\,{}_hX_a^{h-1} = \frac{1+k}{D_a}\,(N_{a+h-1} - N_{a+2h-1});$$

Pour la troisième période :

$$(1+2k)\,{}_hX_a^{2h-1} = \frac{1+2k}{D_a}\,(N_{a+2h-1} - N_{a+3h-1}), \ldots$$

ce qui, en supprimant les termes qui se détruisent, et en tenant compte de la relation (46), se réduit à

$$1 + \frac{N_a - N_{a+n-1} + k\,[N_{a+h-1} + N_{a+2h-1} + \ldots + N_{a+(m-1)h-1} - (m-1)\,N_{a+mh-1}]}{D_a}.$$

Si l'on introduit l'annuité constante temporaire de $n-1$ années, ${}_{n-1}X_a$, dont la valeur est

$$1 + {}_{n-1}X_a = \frac{N_{a-1} - N_{a+n-1}}{D_a},$$

que l'on représente l'annuité variable, payable d'avance, actuellement cherchée, par Y, et que l'on pose, pour abréger,

$$(91)\quad U = \frac{N_{a+h-1} + N_{a+2h-1} + \ldots + N_{a+(m-1)h-1} - (m-1)\,N_{a+mh-1}}{N_{a-1} - N_{a+n-1}},$$

on arrive à la relation

$$(92)\qquad Y = (1 + {}_{n-1}X_a)(1 + kU).$$

U est une quantité qui ne dépend que de la durée de la période, mais qui ne dépend pas de k, accroissement de la prime d'une période à l'autre. Pour chaque division en périodes, on pourra donc faire varier k comme on le voudra, en lui donnant même des valeurs positives ou négatives.

Comme cas particulier, si la somme versée doit varier chaque année, cela revient à dire que la période n'a qu'une année et que $h = 1$ et $m = n$. La valeur de U est alors

$$(93)\qquad U = \frac{S_a - S_{a+n-1} - (n-1)\,N_{a+n-1}}{N_{a-1} - N_{a+n-1}}.$$

Si l'annuité variable n'est pas temporaire, mais embrasse tout le cours de l'existence, au lieu d'être limitée à n années, les formules ci-dessus se simplifient et deviennent

$$(94)\qquad U = \frac{S_a}{N_a},$$

$$(95)\qquad Y = (1 + X_a)(1 + kU).$$

Premier exemple. — Calculer la valeur actuelle d'une annuité variable, d'une durée de 25 années, sur une tête de 30 ans, les sommes versées étant payables d'avance, et variant par période de 5 ans, à raison de 1000 francs pendant la première période, 1200 francs pendant la deuxième, 1400 francs pendant la troisième, etc., et la première somme de 1000 francs étant payable de suite.

Il faut faire, dans la formule (92), $a = 30$, $n = 25$, $m = 5$, $h = 5$, $k = 0,20$ et l'on obtiendra l'annuité variable relative à une somme versée de 1 franc pour la première année. On a alors

$$U = \frac{N_{34} + N_{39} + N_{44} + N_{49} - 4N_{54}}{N_{29} - N_{54}} = 1,51,$$

$$Y = (1 + {}_{24}X_{30})(1 + 0,20 \times 1,51) = 19,227,$$

soit 19227 francs pour un versement initial de 1000 francs.

Si l'on demande, dans cette même combinaison, quelle doit être l'augmentation d'une période à l'autre pour que l'annuité variable cherchée, et payable d'avance, soit égale à 4 fois l'annuité ordinaire, également payable d'avance, il suffit de déterminer k de manière à satisfaire à la relation

$$1 + kU = 4;$$

c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$k = \frac{3}{1.51},$$

ou très-approximativement

$$k = 2.$$

Les versements annuels devront donc se monter à 1000 francs pendant la première période; à 3000 francs pendant la deuxième; à 5000 pendant la troisième, etc.

Deuxième exemple. — Calculer la valeur actuelle d'une annuité variable pour la vie entière, sur une tête de 30 ans, les sommes versées étant payables d'avance et diminuant tous les ans, à raison de 70 francs la première année, 69 francs la deuxième, 68 francs la troisième, et ainsi de suite.

Il faut faire, dans la formule (95), $a = 30$, $k = \frac{1}{70}$, et l'on aura l'annuité variable relative à une somme versée de 1 franc pour la première année. On a alors

$$Y = (1 + X_{30})\left(1 - \frac{1}{70}\,\frac{S_{30}}{N_{29}}\right) = 16,354.$$

La valeur de l'annuité, pour 70 francs versés la première année, est donc $1144^{fr},78$.

§ III. — Transformation des primes uniques en primes annuelles.

Nous supposerons, dans ce paragraphe, que l'on connaît déjà la prime unique d'une opération d'assurance quelconque, et que l'on veut calculer le montant de primes annuelles, dont l'ensemble doit donner une valeur actuelle égale. Le montant de ces primes annuelles ne dépendra donc que des conditions auxquelles leur payement est surbordonné, et nullement de l'opération d'où peut provenir la prime unique qu'il s'agit de transformer.

178. *Primes annuelles constantes, payables pendant toute la durée de la vie.* — Supposons un contrat dont la prime unique, déjà calculée, a été trouvée égale à P. Au lieu d'acquitter ce prix, l'assuré préfère payer une prime annuelle constante, exigible pendant toute la durée de sa vie.

Soient a l'âge de l'assuré, p_a la prime annuelle cherchée. La première prime étant payable d'avance, la valeur actuelle de l'ensemble des primes que l'assuré s'engage à payer est égale à $p_a(1 + X_a)$; cette valeur devant être équivalente à P, il faut que l'on ait

$$p_a(1 + X_a) = P,$$

d'où l'on conclut

(96) $$p_a = \frac{P}{1 + X_a}.$$

S'il s'agit d'une assurance pour la vie entière, on a, en se servant de la Table de commutation,

$$P_a = \frac{M_a}{D_a} \quad \text{et} \quad p_a = \frac{M_a}{N_{a-1}}.$$

179. *Primes payables par fractions d'année.* — Supposons que la prime doive être payée, non par année, mais par fractions d'année, et cherchons à en déterminer équitablement le montant. En représentant par ${}^mX$, comme au n° 163, l'annuité payable par fractions $\frac{1}{m}$ de l'année, c'est-à-dire la valeur actuelle d'une série de sommes de $\frac{1}{m}$ franc, payable la première de suite et les autres à des intervalles égaux à $\frac{1}{m}$ année, et en désignant par ${}^mp$ le montant de chaque payement, la valeur actuelle de leur ensemble sera

$${}^mp\left(\frac{1}{m} + {}^mX\right),$$

ou, en substituant à ${}^mX$ sa valeur donnée par la formule (53),

$${}^mp\left[X + \frac{m+1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\tau + \rho)\right],$$

ce qui revient, sans erreur appréciable, à

$${}^mp\left(X + \frac{m+1}{12m^2}\right).$$

La prime payable par fractions $\frac{1}{m}$ d'année doit donc être fixée à

$${}^mp = \frac{P}{X + \frac{m+1}{12m^2}}.$$

La prime payable de cette manière est plus forte que la prime

payable par année; leur rapport est égal à

$$\frac{{}^{m}p}{p} = \frac{X + 1}{X + \frac{m+1}{12m^2}}.$$

Quand m est égal à 2, autrement dit quand la prime est payable par semestre, ce rapport est à peu près égal à 1,04, c'est-à-dire que la prime annuelle ordinaire doit être augmentée de 4 pour 100 de sa valeur; quand m est égal à 4, c'est-à-dire quand la prime est payable par trimestre, le rapport devient 1,05 et la prime doit être augmentée de 5 pour 100 de sa valeur. Si enfin m croissait indéfiniment, c'est-à-dire si la prime devait se payer à des intervalles infiniment petits, le rapport serait environ 1,06, et la prime ordinaire devrait être augmentée de 6 pour 100 de sa valeur.

En pratique, l'assuré désire souvent payer ses primes par semestre ou par trimestre; mais on n'emploie pas la méthode qui précède pour déterminer leur montant, et l'on prend pour point de départ une autre considération. On stipule que l'assuré, tout en ne payant sa prime que par fractions d'année, reste débiteur envers la Compagnie des fractions non payées de la prime annuelle correspondant à une année commencée. Les choses se passent donc comme s'il payait sa prime annuelle tout entière et s'il empruntait, en même temps, à la Compagnie les fractions qui suivent la première, chacune jusqu'à son échéance. Il doit donc payer les intérêts de ces emprunts, intérêts qui, au taux de 4 pour 100, se montent : si la prime est fractionnée par semestre, à 1 pour 100 de la prime annuelle, payable après un semestre, et si la prime est fractionnée par trimestre, à $1\frac{1}{2}$ pour 100 de la prime, payable à raison de 0,0025 pour 100 après un trimestre, 0,0050 après deux trimestres, et 0,0075 pour 100 après trois trimestres.

Cette comptabilité serait beaucoup trop compliquée pour la pratique, et, afin que les payements soient égaux à toutes les échéances, on stipule que la prime annuelle ordinaire sera augmentée de 1 pour 100 quand elle est fractionnée par se-

mestre, et de $1\frac{1}{2}$ pour 100 quand elle est fractionnée par trimestre, et que la prime ainsi augmentée sera divisée en deux ou quatre payements égaux.

L'assuré reste débiteur des fractions de primes non versées sur toute année commencée. Si son décès survient, la Compagnie retient ces fractions non versées sur le capital assuré qu'elle a à payer. Dans le cas où l'assuré ne donne pas suite à son assurance, il devrait aussi rembourser à la Compagnie les fractions de primes restant ainsi en suspens; mais cette clause susciterait des difficultés dans son application, et les Compagnies ne l'insèrent pas dans leurs contrats. Les assurés qui renoncent à leur assurance dans le cours d'une année commencée bénéficient donc des fractions de primes en suspens, dont ils sont réellement débiteurs. Nous verrons plus loin, à propos du rachat des contrats, que les Compagnies trouvent d'un autre côté une sorte de compensation.

180. *Primes temporaires.* — Au lieu de payer une prime unique, l'assuré peut encore payer une prime temporaire, c'est-à-dire exigible pendant un certain nombre d'années seulement, les payements cessant dans tous les cas s'il vient à décéder.

Soit n le nombre d'années fixé, et ${}_np_a$ la prime temporaire cherchée. La valeur actuelle de l'ensemble des primes est ${}_np_a(1 + {}_{n-1}X_a)$, et, comme elle doit être égale à P, il faut que l'on prenne

$$(97) \qquad {}_np_a = \frac{P}{1 + {}_{n-1}X_a}.$$

181. *Primes variables.* — On peut adopter, pour le payement des primes annuelles, toute autre combinaison qui paraît répondre aux exigences de la pratique; on peut adopter, par exemple, des primes variant avec le temps écoulé, suivant une loi quelconque. Si l'on représente par $d, e, f, g, \ldots$ les primes successives à payer d'année en année, primes reposant toutes sur une tête d'âge a, il suffit, pour que leur en-

semble puisse remplacer la prime unique P, que ces primes satisfassent à la relation

$$(98) \qquad d + eQ_a^1 + fQ_a^2 + gQ_a^3 + \ldots = P.$$

On pourra donc faire varier ces primes à l'infini, suivant la combinaison que l'on voudra adopter.

Si les primes augmentent, comme cela a lieu ordinairement, par périodes d'un certain nombre d'années, ou même par années, suivant une progression arithmétique, on aura recours, pour calculer leurs valeurs actuelles, aux formules du n° 177, qui concernent les annuités variables.

Supposons que les primes annuelles doivent rester constantes pendant une première période de n années, puis augmenter, d'une période à l'autre, d'une quantité constante égale à une fraction k de leur valeur initiale, et voyons comment on peut déterminer la prime initiale quand on connaît k, et comment on peut déterminer k quand on connaît la prime initiale.

Si l'on représente par π la prime initiale, et par Y, comme au n° 177, l'annuité variable payable d'avance, la valeur actuelle de toutes les primes, reposant sur une tête d'âge a, ressort à πY, qui doit être égale à P, prime unique supposée déterminée. Or, si, d'autre part, on représente, comme dans tout ce qui précède, par ${}_{n-1}X_a$ l'annuité temporaire constante, par $1 + {}_{n-1}X_a$ cette même annuité payable d'avance, par ${}_np_a$ la prime temporaire constante payable pendant n années, on sait que

$${}_np_a(1 + {}_{n-1}X_a) = P.$$

Par conséquent on aura également

$$(99) \qquad \pi = p\,\frac{1 + {}_{n-1}X_a}{Y} = \frac{{}_np_a}{1 + kU}.$$

U étant facile à calculer d'après les données de la combinaison posée, et p résultant également de formules ou de Tables connues, cette formule donnera donc π si l'on connaît k, ou réciproquement.

182. *Primes remboursables.* — On peut stipuler que toutes les primes versées seront remboursées par la Compagnie au décès d'une tête déterminée A, âgée aujourd'hui de a années. Soit 1 franc la prime annuelle; le payement de la première prime ne rapporte réellement à la Compagnie que l'intérêt t pendant toute la vie de A : ce payement équivaut donc à tX_a. De même le payement éventuel de la deuxième prime n'a qu'une valeur actuelle tX_a^1; le payement de la troisième, qu'une valeur tX_a^2, et ainsi de suite. Si maintenant la prime annuelle est p au lieu d'être de 1 franc, la valeur actuelle de l'ensemble sera

$$pt\,(X_a + X_a^1 + X_a^2 + \dots),$$

et, comme cela doit être équivalent au payement immédiat d'une somme P, il faudra donner pour valeur à p

(100) $$p = \frac{P}{t\,(X_a + X_a^1 + X_a^2 + \dots)}.$$

On peut encore stipuler que les primes versées seront remboursées par la Compagnie au décès d'une tête a, mais seulement si ce décès survient dans un délai de n années. Le payement de la première prime de 1 franc a alors pour valeur $t_n X_a + X_a^n$; le payement de la deuxième $t_{n-1} X_a^1 + X_a^n$; le payement de la troisième, $t_{n-2} X_a^2 + X_a^n \dots$. Il faut donc donner pour valeur à la prime annuelle p

$$p = \frac{P}{t\,({}_nX_a + {}_{n-1}X_a^1 + {}_{n-2}X_a^2 + \dots + {}_1X_a^{n-1}) + nX_a^n},$$

ce qui, d'après la formule (68), équivaut à

(101) $$\frac{P}{t\,(X_a + X_a^1 + X_a^2 + \dots + X_a^{n-1}) + (n - t)\,X_a^n}.$$

On pourrait imaginer toute espèce d'autres clauses pour stipuler le remboursement des primes, soit en cas de décès, soit en cas d'existence de certaines personnes. Supposons, par exemple, que dans une Assurance quelconque, payée au moyen de primes temporaires de n années sur une certaine

tête, on demande à la Compagnie de s'engager à rembourser dans n années toutes les primes versées, sans aucune condition de vie ou de décès. Dans ce cas, la valeur actuelle de l'annuité à percevoir, au lieu d'être ${}_nX_a$, se trouve réduite à ${}_nX_a\left[1-\frac{1}{(1+t)^n}\right]$, de sorte que la prime annuelle temporaire p, dans l'hypothèse de cette convention, serait déterminée par la formule

$$(102)\qquad p\left\{1+{}_nX_a\left[1-\frac{1}{(1+t)^n}\right]\right\}=P,$$

P étant la prime unique dont on cherche l'équivalent.

De même, si les primes temporaires devaient être remboursées dans n années, mais seulement dans le cas où une tête d'âge a serait alors en vie, ces primes seraient déterminées par la formule

$$(103)\qquad p\left\{1+{}_nX_a\left[1-\frac{1}{(1+t)^n}\frac{f(a+n)}{f(a)}\right]\right\}=P;$$

et, si ces primes devaient être remboursées dans n années, mais seulement dans le cas où une tête d'âge a serait alors décédée, ces primes seraient données par la formule

$$(104)\qquad p\left\{1+{}_nX_a\left[1-\frac{1}{(1+t)^n}\frac{f(a)-f(a+n)}{f(a)}\right]\right\}=P.$$

183. *Primes reposant sur deux têtes. Primes payables jusqu'au premier décès de deux personnes désignées.* — Soient a et b les âges des deux assurés, et $p_{a,b}$ la prime annuelle.

La première prime étant payable d'avance, la valeur actuelle de l'ensemble des primes qu'ils s'engagent à payer est égale à $p_{a,b}(1+X_{a,b})$. Cette valeur devant être équivalente à P, il faut que l'on ait

$$p_{a.b}(1+X_{a,b})=P,$$

d'où l'on conclut

$$(105)\qquad p_{a,b}=\frac{P}{1+X_{a,b}}.$$

184. *Primes payables jusqu'au dernier décès de deux per-*

sonnes désignées. — Soit $p_{\overline{a,b}}$ la prime payable jusqu'au dernier décès; la valeur actuelle de l'ensemble de ces primes est

$$p_{\overline{a,b}}(1 + X_{\overline{a,b}});$$

et, comme il faut qu'elle soit égale à P, il en résulte qu'il faut donner à $p_{\overline{a,b}}$ la valeur

$$(106) \qquad p_{\overline{a.b}} = \frac{P}{1 + X_{\overline{a,b}}} = \frac{P}{1 + X_a + X_b - X_{a,b}}.$$

185. *Primes temporaires reposant sur deux têtes.* — Quand les primes annuelles, en même temps qu'elles reposent sur deux têtes, sont temporaires, leur valeur se calcule de la même manière. Si elles sont payables jusqu'au premier décès seulement, leur valeur ressort à

$$(107) \qquad {}_np_{a,b} = \frac{P}{1 + {}_{n-1}X_{a,b}},$$

et, si elles sont payables jusqu'au dernier décès, leur valeur est

$$(108) \qquad {}_np_{\overline{a,b}} = \frac{P}{1 + {}_{n-1}X_{\overline{a,b}}}.$$

186. *Primes annuelles reposant sur trois têtes.* — Si les primes sont payables seulement jusqu'au premier décès des trois têtes désignées d'âges a, b, c, leur quotité sera de même donnée par la formule

$$(109) \qquad \frac{P}{1 + X_{a,b,c}}.$$

187. *Primes rapportant un intérêt.* — Certaines Compagnies s'engagent à payer, à un taux déterminé, l'intérêt des primes versées; cela augmente naturellement beaucoup l'importance de le prime annuelle. Soit θ le taux de l'intérêt stipulé, et supposons que la Compagnie s'engage à le payer pendant toute la vie d'une personne d'âge a. Le payement de la première prime grève la Compagnie d'une charge égale à $\theta p X_a$; le payement de la deuxième, d'une charge égale à

$\theta p X^1_a$; le payement de la troisième, de $\theta p X^2_a$; etc. La Compagnie doit donc demander le remboursement de toutes ces charges, en sus du prix réel de l'assurance, représenté par la prime unique P. Par conséquent, la valeur actuelle de l'ensemble des primes, qui était précédemment posée égale à P, doit être, quand on adopte cette combinaison, posée égale à

$$(110) \qquad P + \theta p (X_a + X^1_a + X^2_a + \ldots).$$

Si le payement de l'intérêt devait subsister pendant toute la vie de deux personnes *a* et *b*, cette expression devrait être remplacée par

$$(111) \qquad P + \theta p (X_{a,b} + X^1_{a,b} + \ldots).$$

Moyennant cette modification, on peut appliquer cette stipulation, d'un intérêt alloué sur les primes, à toutes les modalités précédemment passées en revue pour le payement des primes annuelles.

Par exemple, la prime constante, déterminée au numéro 167 par la formule

$$p_a (1 + X_a) = P,$$

sera déterminée, si l'on doit payer l'intérêt des primes pendant toute la vie de l'assuré, par la formule

$$\pi_a (1 + X_a) = P + \theta \pi_a (X_a + X^1_a + \ldots),$$

$$\pi_a \frac{N_{a-1}}{D_a} = P + \theta \pi_a \frac{S_a}{D_a},$$

$$(112) \qquad \pi_a = \frac{PD_a}{N_{a-1} - \theta S_a},$$

π_a désignant la prime cherchée.

De même, la prime remboursable déterminée au numéro 170 par la formule (100) devra avoir pour valeur, dans cette nouvelle hypothèse,

$$(113) \qquad \pi = \frac{P}{(t - \theta)(X_a + X^1_a + \ldots)}.$$

On peut constater ici, à titre de vérification, que, si le

taux θ de l'intérêt stipulé est égal au taux t que la Compagnie retire des primes versées, la prime doit augmenter jusqu'à l'infini. Et en effet, si la Compagnie s'engage à la fois à payer l'intérêt des primes versées et à les restituer plus tard en capital, ces primes ne lui produisent absolument rien, quelque élevées qu'elles soient.

On peut également calculer la valeur des primes devant rapporter un intérêt fixe en employant la formule (95), qui est relative aux annuités variables. Soient, en effet, π la prime annuelle calculée avec cette condition et p la prime annuelle ordinaire, calculée sans cette condition, pour une assurance sur la vie entière. L'assuré aura réellement à débourser : π la première année, $\pi(1 - \theta)$ la deuxième année, $\pi(1 - 2\theta)$ la troisième année, etc.

Ces primes forment une annuité payable d'avance et décroissant suivant une progression arithmétique, dont la raison est θ. La valeur de cette annuité est donc

$$\pi\left[1 + X_a\left(1 - \theta\frac{S_a}{N_a}\right)\right],$$

et, comme elle doit être égale à P, il faut que l'on ait

$$\pi = \frac{P}{1 + X_a - \theta\frac{S_a}{D_a}} = \frac{PD_a}{N_{a-1} - \theta S_a},$$

valeur déjà établie tout à l'heure sous le numéro (112).

§ IV. — Calcul des primes des diverses opérations d'assurances.

Les formules générales données dans les §§ II et III permettent de calculer les primes de toutes les opérations d'assurances sur la vie ; mais, avant de passer à leur application, nous devons maintenant donner quelques détails sur la nature et le but de ces opérations.

Étude du contrat d'assurance sur la vie.

188. Les assurances, en général, sont des opérations ayant pour objet d'indemniser ceux qui les contractent des pertes matérielles qu'ils sont exposés à subir, par suite d'événements indépendants de leur volonté. Pour qu'un contrat d'assurance puisse se réaliser moyennant un prix déterminé, il faut qu'il y ait deux contractants, un assuré et un assureur, qui puissent tomber d'accord sur le prix du risque couru. Cela n'arrive, pour chaque nature d'assurance, que lorsque l'observation des faits passés permet aux deux contractants de se rendre compte assez exactement de l'importance du risque couvert par l'assurance, c'est-à-dire du nombre d'objets semblables qui sont ordinairement détériorés ou détruits dans un temps donné, par rapport au nombre total d'objets exposés au risque.

Tant que cette observation n'a pu avoir lieu assez exactement, il est à peu près impossible que l'assuré et l'assureur tombent d'accord sur le prix de l'assurance, et celle-ci ne peut alors se conclure que sous la forme mutuelle. Les assurés ne trouvant pas de contre-partie mettent leurs intérêts en commun, et c'est leur collectivité qui, jouant le rôle d'assureur, sert de contre-partie à chacun d'eux considéré isolément. Les assurés désignent, chacun de leur côté, des objets de même nature qui leur appartiennent, et qui sont menacés d'un même danger ; ils conviennent que les pertes subies par ces objets, par suite du danger spécial et prévu dont ils sont tous menacés, seront réparties sur l'ensemble. C'est là l'assurance mutuelle, forme sous laquelle ont dû commencer à fonctionner les assurances de tout genre.

Quand l'observation des faits passés est assez complète pour permettre d'évaluer l'importance du risque que courent certains objets par suite d'un certain danger spécial, il se trouve des assureurs qui consentent à servir de contre-partie aux assurés moyennant un prix fixe, et qui demandent un

prix assez modéré pour que les assurés jugent à propos de l'accepter. Ce sont alors ces assureurs qui se chargent à forfait, moyennant le prix convenu, d'indemniser les assurés des pertes qu'auront subies les objets désignés par eux, par suite du danger spécial dont ils étaient tous menacés. C'est là l'assurance à primes fixes : ce système présente, pour la plupart des natures d'assurances, plus d'avantages que le système mutuel, au moins tel qu'il a été pratiqué jusqu'à présent.

189. L'assurance sur la vie, dans son acception la plus large, embrasse toutes les opérations dont les effets dépendent de la durée de la vie humaine. Les assurances sur la vie se distinguent donc, par leur définition même, de toutes les autres assurances, qui ont pour objet essentiel la réparation directe d'un dommage. On peut sans doute, et c'est ce qui se fait souvent, combiner une assurance sur la vie de manière à réparer un dommage que causerait à un individu la durée trop courte ou trop longue de la vie d'un autre individu ; mais on peut également faire des assurances sur la vie qui n'atteignent pas ce but. En conséquence, tandis que toutes les autres assurances sont des contrats aléatoires ayant pour but unique et essentiel la réparation d'un dommage éventuel, les assurances sur la vie sont simplement des contrats aléatoires, reposant sur la durée de la vie humaine; on peut les conclure, soit dans le but de réparer un dommage, soit dans tout autre but.

Les assurances ordinaires ne réparent que les dommages directs et non les dommages indirects, c'est-à-dire qu'elles se bornent à rembourser la valeur de l'objet détruit, mais elles ne tiennent pas compte à l'assuré du produit qu'il aurait pu tirer, dans l'avenir, de l'exploitation de cet objet. Ainsi l'assureur rembourse la valeur d'un navire perdu ou d'une usine brûlée, parce que ce sont des dommages directs; mais il n'a rien à payer pour les bénéfices que le navire aurait pu rapporter dans ses voyages suivants, ou que l'usine

aurait pu produire pendant les années à venir, parce que ce sont là des dommages indirects. Il en est tout autrement dans l'assurance sur la vie : celle-ci ne répare que des dommages indirects. En effet, hors le cas où un maître assurerait les esclaves dont il est propriétaire, pour recevoir, en cas de décès, une somme représentant leur valeur vénale, l'existence d'une personne n'est jamais un capital faisant partie du patrimoine d'un autre individu. Cette existence peut seulement avoir une grande valeur indirecte, en ce sens que la seconde personne perd, par le fait du décès, tous les bénéfices et avantages qu'elle aurait pu recueillir par la suite, si la première avait vécu : ce sont là des dommages indirects, tout à fait comparables à ceux que les autres assurances ne réparent jamais ; en fait d'assurances sur la vie, il n'y en a pas d'autres : ce sont les seuls que cette assurance soit appelée à réparer.

Il suit de là que les sommes garanties par les assurances sur la vie doivent toujours être fixées par le contrat lui-même, tandis que cela n'a pas lieu pour les autres assurances. En effet, un dommage direct ne peut pas s'évaluer avant l'événement qui lui donne naissance, mais il s'évalue facilement après, et cette évaluation sert à fixer la somme que l'assureur doit allouer pour sa réparation ; les contrats d'assurances proprement dites ne fixent donc, avant l'événement, qu'un maximum pour la somme assurée, et n'en donnent jamais une évaluation à forfait.

Il en est tout autrement quand il s'agit d'un dommage indirect ; après comme avant l'événement, il est impossible de l'évaluer. On est donc forcé de fixer, avant l'événement et dans le contrat d'assurance lui-même, une somme qui est censée former une réparation suffisante pour le dommage indirect que l'on a à redouter. Quand l'événement prévu se réalise, on n'a pas à rechercher si le dommage indirect éprouvé est inférieur à la somme assurée ; et, quand même cela serait démontré, l'assureur devrait néanmoins exécuter la convention, et payer la somme entière, parce que cette somme a été

fixée d'avance. Le contrat d'assurance sur la vie n'a donc pas pour essence même de s'appliquer à la réparation d'un dommage : il oblige simplement l'assureur à payer une somme déterminée si tel événement déterminé vient à se produire. Sans doute, dans la pratique, on combine le plus souvent les clauses de ce contrat de manière que la personne qui reçoit le payement de l'assureur soit précisément l'une de celles à qui l'événement prévu occasionne un dommage indirect; mais autre chose est le mode d'application d'un contrat, autre chose est la nature même de ce contrat.

D'ailleurs, le contrat d'assurance sur la vie ne s'applique pas toujours de cette manière ; on peut s'en servir, par exemple, pour laisser, après son décès, un capital à une personne qui n'éprouvera par suite de ce décès aucun dommage.

Les assurances sur la vie ne rentrent donc point dans la définition générale des assurances, et elles doivent former une classe à part dans les contrats aléatoires. L'article 1964 du Code civil distingue quatre classes de contrats aléatoires : le contrat d'assurance (maritime), le prêt à la grosse aventure, le jeu et le pari, le contrat de rente viagère. C'est depuis la rédaction du Code qu'ont pris naissance en France les assurances sur la vie, contre l'incendie, contre la grêle, etc. Il résulte de tout ce qui précède que le contrat d'assurance sur la vie doit être réuni au contrat de rente viagère, qui n'en est qu'un cas particulier, parce que tous deux sont de même nature et ont pour objet le payement de certaines sommes dans des cas déterminés dépendant de la durée de la vie humaine ; qu'au contraire tous les autres contrats d'assurance doivent être réunis à la première classe, au contrat d'assurance maritime, parce qu'ils sont de même nature et ont, comme lui, pour objet essentiel, la réparation d'un dommage direct causé par un événement redouté.

Il nous reste à examiner en quoi le contrat d'assurance sur la vie se distingue de la troisième classe des contrats aléatoires énumérés par le Code civil, c'est-à-dire du jeu et du

pari. La distinction la plus nette, c'est qu'il repose toujours sur la durée de la vie humaine ; et, à ne considérer que son essence même, abstraction faite du but qu'on lui assigne toujours dans la pratique, le contrat d'assurance sur la vie n'est qu'une variété du contrat du jeu : c'est un jeu de hasard reposant sur la durée de la vie humaine. S'il était besoin d'un exemple pour justifier cette classification, on n'aurait qu'à examiner, abstraction faite du but qu'on peut se proposer, un contrat d'assurance temporaire : Pierre convient avec une Compagnie de lui payer 150 francs dans un an si Paul est alors vivant, et d'en recevoir au contraire 10000 si Paul est alors décédé. Qu'est-ce autre chose qu'un jeu ou un pari, à raison de 1000 contre 15, au sujet de cet événement : la vie ou le décès de Paul ? Or, ce qui est incontestable pour l'assurance temporaire est également vrai, quant à leur nature, pour tous les contrats d'assurances sur la vie.

Ainsi, ce qui caractérise les contrats d'assurance sur la vie, et les distingue de tous les autres contrats de jeu, c'est leur sujet, qui est toujours la durée de la vie humaine. Il y a deux autres éléments qui, sans être essentiels aux contrats d'assurance sur la vie, s'y trouvent cependant toujours joints dans la pratique, et qui par conséquent les distinguent encore en fait d'une manière très-nette des autres contrats de jeu : ces deux éléments sont leur durée et leur but.

Les contrats d'assurance sur la vie ont généralement une longue durée, 15 à 20 ans, et souvent plus ; les assurances temporaires qui sont les moins longues ont toujours une durée d'un an au moins : c'est cette particularité qui empêche les joueurs de les rechercher, de les adopter comme base de leurs spéculations, parce que la passion du jeu ne s'exerce qu'à courte échéance et déserte toutes les combinaisons qui n'ont pas pour elle cet avantage. On ne fait donc pas d'assurances sur la vie dans un simple but de spéculation, mais seulement dans le but de constituer des capitaux à certaines époques, déterminées par des conditions de vie ou de décès. Ce but est généralement moral, justifié par la position

sociale du bénéficiaire. Le bénéficiaire est généralement exposé à des dommages indirects par certaines conditions de vie ou de décès, et c'est à ces dommages éventuels qu'il se propose de parer ; mais, dans tous les cas où ces dommages éventuels ne seraient pas à craindre, celui qui contracterait une assurance sur la vie ne ferait pas une assurance réelle, mais une simple spéculation, quelquefois sans s'en rendre compte.

Les assurances sur la vie n'étant que des conventions aléatoires reposant sur des événements de pur hasard, les conditions dans lesquelles elles doivent être conclues se calculent comme pour tous les autres jeux de hasard ; la mise de chacun des deux contractants doit être proportionnelle à sa probabilité de gagner, probabilité qui ne dépend que d'un calcul mathématique, parce que l'événement est de pur hasard, c'est-à-dire, d'après la définition donnée au nº 5, dépend de causes incomprises de l'assureur et de l'assuré.

De ce fait que l'assurance sur la vie n'est au fond, au moins au point de vue du calcul des primes, qu'un jeu de hasard entre la Compagnie et l'assuré, résulte contre elle une objection qui se présente tout de suite à l'esprit. Les Compagnies qui calculent les primes se réservent nécessairement un avantage sous une forme ou sous une autre; il y a donc, sous le rapport purement financier, un désavantage inévitable pour l'assuré. Cela est incontestable : l'assurance sur la vie étant une industrie, il faut que ceux qui l'exercent y trouvent un bénéfice; il faut qu'ils vendent leur marchandise plus cher qu'elle ne leur coûte. Le même fait se produit dans toutes les branches de l'industrie humaine, ce qui ne les empêche pas de fonctionner et de rendre des services aussi bien à ceux qui les exercent qu'à ceux qui les utilisent. Le marchand qui livre des vêtements, le banquier qui livre des capitaux les vendent plus cher qu'ils ne leur coûtent, et ils trouvent cependant des acheteurs. Tout acheteur d'un produit sait parfaitement qu'en l'achetant il en paye le prix de revient, plus le bénéfice du vendeur ; aussi ne doit-il avoir recours à celui-ci

que quand il a besoin d'un produit déterminé, mais jamais, dans le courant ordinaire du commerce, l'acheteur ne peut faire intrinsèquement une bonne affaire, c'est-à-dire payer les produits moins cher que leur prix de revient. Il en est de même pour l'assurance sur la vie, on la paye plus cher qu'elle ne coûte : il ne faut donc y avoir recours que quand on en a besoin. Celui qui voudrait chercher une combinaison ingénieuse, dans l'espoir de contracter une assurance en la payant moins qu'elle ne coûte, poursuivrait une tâche irréalisable : il est donc intéressant de rechercher dans quels cas un particulier a intérêt à contracter une assurance, et dans quels cas au contraire cette opération ne serait pour lui qu'un simple contrat de jeu. Pour cela il faut chercher quelles sont la nature et l'importance de l'avantage que se réserve la Compagnie qui assure, de quelle manière il grève l'assuré dans tels ou tels cas, et quelles compensations celui-ci peut trouver dans l'opération, suivant les besoins particuliers que lui crée sa position sociale. L'assuré, ayant toujours un désavantage au point de vue purement financier, n'aura intérêt à conclure son contrat que s'il trouve, au point de vue moral, un avantage plus grand rétablissant la balance en sa faveur. L'opération n'en sera pas moins avantageuse pour la Compagnie; mais au moins l'assuré se sera placé dans la position que doit prendre tout acheteur d'un produit quelconque de l'industrie humaine, il n'aura acheté que le produit dont il a besoin.

190. La plupart des combinaisons d'assurances sur la vie sont assez compliquées pour qu'il soit difficile de constater, par la simple comparaison du capital assuré avec la prime payée, si l'assuré a une perte financière à subir, et quelle est l'étendue de cette perte. Mais toutes ne sont que des transformations, par voie d'équivalence et au moyen de formules mathématiques, d'une combinaison très-simple, rudimentaire, dans laquelle il est facile de se reconnaître, et que nous allons étudier à titre d'exemple.

Supposons qu'un particulier verse une certaine somme au-

jourd'hui pour en recevoir une autre après un délai fixé, mais dans le cas seulement où à cette époque certaines conditions de vie ou de décès se seront réalisées. Soit p la probabilité que ces conditions se seront réalisées ; comme le contractant paye d'avance, il faut, pour que les choses soient égales, que, pour un versement égal à p, la Compagnie ait à lui payer, à l'époque fixée, 1 ou zéro, suivant que les conditions stipulées se seront ou non réalisées. En pratique, non-seulement le contractant paye d'avance, mais il paye assez longtemps d'avance pour qu'on ait à tenir compte des intérêts produits par son versement. Pour ces intérêts, la Compagnie bonifie à forfait 4 pour 100 en intérêts composés : on peut représenter par h la somme ainsi produite par 1 franc de versement pendant le temps stipulé pour la durée de l'opération ; quant au contractant, s'il n'avait pas fait son versement d'avance, il aurait pu de son côté en placer le montant, soit à intérêts simples, soit à intérêts composés, et l'on peut représenter par k la somme que lui aurait produite 1 franc au bout du même temps. L'importance de sa mise, ramenée à la fin de la période fixée pour l'assurance, est ainsi égale à kp. La somme qu'il aura à recevoir serait zéro ou h si la Compagnie ne prélevait ni frais ni bénéfices sur le produit des chances mathématiquement calculé ; mais celle-ci prélève, pour frais et bénéfices, une part de la somme qu'elle aurait à payer d'après le calcul, et ne verse au contractant qu'une fraction α de la somme h, de sorte que celui-ci n'aura réellement à recevoir que zéro ou αh. Ce payement éventuel de αh ne rémunère exactement qu'un payement de $\frac{p\alpha h}{k}$, fait par lui à l'origine de l'assurance ; d'où il suit que le coût de l'opération pour le contractant, autrement dit l'excédant du prix payé par lui sur la valeur mathématique de l'engagement, ressort en réalité à

$$p\left(1-\alpha\frac{h}{k}\right).$$

De plus, il faut remarquer que, si, pour certaines combinai-

sons d'assurances, αh était plus petit que kp, ces combinaisons ne pourraient être que désavantageuses pour le contractant, puisque, moyennant une dépense égale à kp, il ne pourrait jamais recevoir que zéro ou αh.

$\frac{h}{k}$ représente le rapport entre ce que produit la somme versée, placée à 4 pour 100 à intérêts composés, et ce qu'elle aurait produit au contractant si elle était restée entre ses mains. Ce second élément n'est pas susceptible d'un calcul exact; et son évaluation se prête au contraire à de nombreuses illusions. Le contractant est porté à admettre que, si les sommes qu'il a versées étaient restées à sa disposition, il aurait pu les placer pendant toute la période de l'assurance à un taux avantageux, plus avantageux que le taux de 4 pour 100 à intérêts composés. Cela pourrait arriver pour les assurances contractées à prime unique et pour des sommes très-élevées, parce qu'en ce cas la prime unique versée forme déjà un capital important, dont les intérêts semestriels produisent des sommes assez considérables pour qu'un particulier se préoccupe de les replacer aussitôt qu'il les a touchées; mais, en réalité, toutes les assurances se font à primes annuelles, et les intérêts que ces primes auraient produits pour le contractant auraient été tellement faibles qu'il n'aurait pu les replacer à chacune de leurs échéances. On peut donc admettre qu'il n'aurait jamais pu profiter des intérêts composés, et qu'il n'aurait pu, sans courir de risque, placer ses fonds, même à intérêt simple, à plus de 5 pour 100 net. Bien plus, on est obligé de reconnaître que les sommes qu'il a versées en primes, si elles étaient restées entre ses mains, ne lui auraient souvent rapporté aucun intérêt, et auraient même pu, au bout du terme fixé pour l'assurance, ne lui laisser entre les mains qu'un capital inférieur à leur somme comptée sans intérêts, parce que, suivant toutes les probabilités, il en aurait dépensé une partie. Ainsi, dans le rapport $\frac{h}{k}$, la quantité k qu'il s'agit d'évaluer serait plus grande que h au point de vue mathématique ou absolu; mais,

dans la réalité, elle est généralement plus petite que h et souvent même plus petite que 1. Cela fait simplement ressortir dans une formule la différence qu'il y a entre une Compagnie et un particulier pour le placement des petites économies : théoriquement, la Compagnie les place moins bien, et $\frac{k}{h}$ est plus petit que 1 ; pratiquement, elle les place beaucoup mieux, parce qu'au moins elle les conserve, et $\frac{k}{h}$ est plus grand que 1, souvent même plus grand que k. Cela est d'autant plus vrai que l'assurance est contractée pour une durée plus longue et pour une somme plus faible, et que les payements stipulés par le contractant sont plus divisés.

Le coefficient α est plus ou moins élevé suivant la nature de l'affaire. Nous avons dit que, dans l'opération générale que nous examinons actuellement, le capital assuré devait, suivant les conventions, être payé par la Compagnie après un délai fixé, si telles ou telles conditions de vie ou de décès se réalisaient. Il y a ici une distinction importante à faire, suivant que le capital doit être payé dans le cas où une personne désignée serait vivante (et alors l'opération prend le nom d'*assurance en cas de vie*), ou bien dans le cas où une personne désignée serait décédée (et alors l'opération prend le nom d'*assurance en cas de décès*.)

Pour les assurances en cas de vie, le coefficient α est égal à 1, les Compagnies n'augmentant pas les primes, calculées mathématiquement, d'après une Table de mortalité au moins aussi favorable aux assurés, peut-être même plus favorable que ne serait la réalité. Dans les assurances en cas de décès, α varie beaucoup d'une affaire à une autre, mais on peut admettre que, pour la généralité, sa valeur ressort à 0,80.

Enfin p représente la probabilité de l'événement attendu par le contractant, et qui doit donner lieu à un payement de la part de la Compagnie. Plus cet événement est probable, et plus le coût de l'opération d'assurance est élevé. Suivant les diverses combinaisons d'assurances que l'on peut adopter, cete probabilité prend toutes les valeurs comprises entre zéro

et 1 ; elle est généralement faible dans les assurances en cas de décès, et au contraire assez rapprochée de l'unité dans les assurances en cas de vie, ce qui fait que ces dernières sont plus onéreuses au contractant que les premières.

Lorsque p est très-rapproché de l'unité, il peut arriver que k, quantité que l'on ne peut pas calculer, mais que chacun peut évaluer suivant ses appréciations, soit porté par certains assurés à une valeur assez élevée pour que kp soit plus grand que αh, et dans ce cas l'opération ne peut être jugée par eux que défavorable. Examinons dans quels cas kp peut ainsi devenir plus grand que αh. Dans les assurances en cas de décès, cette circonstance se présenterait si p était plus grand que 0,80; si, par exemple, un particulier versait une somme de 1000 francs à l'âge de 60 ans pour assurer un capital plus fort, payable à sa famille 25 ans après et dans le cas seulement où il serait alors décédé. La probabilité du décès dans ce laps de temps est égale à $\frac{53444}{58866}$, ou 91 pour 100 ; le capital assuré serait donc moindre que celui qu'aurait produit la simple capitalisation des intérêts à 4 pour 100. Aussi les combinaisons de ce genre ne se traitent-elles jamais ; loin de là, dans les combinaisons usitées, la probabilité p ne dépasse guère 0,20, et le capital assuré est alors bien supérieur au produit des intérêts capitalisés. Dans les assurances en cas de vie, α est égal à 1, de sorte que la question de savoir si pk peut devenir plus grand que αh dépend entièrement de l'estimation de la valeur de k, c'est-à-dire du produit que le contractant aurait pu retirer du placement de ses fonds. Si l'on admet qu'il aurait pu réaliser un placement à intérêts composés à 5 ½ pour 100, la valeur du rapport $\frac{h}{k}$ pour une durée d'une vingtaine d'années serait $\left(\frac{1,04}{1,055}\right)^{20}$ ou 0,80; la circonstance défavorable se présentera donc toutes les fois que p sera plus grand que 0,80, c'est-à-dire dans un grand nombre de cas. Si, par exemple, un homme âgé de 20 à 30 ans versait un capital pour en recevoir un plus élevé après 20 années écoulées, mais dans le cas seulement où il serait alors

vivant, il contracterait là une opération qui, même en cas de réussite, lui rapporterait moins que la capitalisation de la somme versée par lui, à intérêt composé de 5 $\frac{1}{2}$ pour 100.

Bien qu'une assurance sur la vie ne puisse pas être avantageuse à la masse des contractants considérée en moyenne, en tant qu'opération financière, nous voyons cependant déjà, par la discussion qui précède, qu'elle lui donne un avantage moral très-important : elle lui facilite le placement des petites sommes à intérêt composé ; elle le garantit contre la tendance qu'il aurait eue certainement de dépenser non-seulement les intérêts de ses épargnes annuelles, mais souvent ces épargnes elles-mêmes. En s'en tenant à ce point de vue, on voit qu'il ne serait pas d'une bonne administration de consacrer à l'assurance ce qu'on peut appeler des capitaux, mais qu'il est très-logique de lui consacrer des épargnes. Quelle que soit la forme de l'assurance adoptée, le fait seul de cette assurance crée pour le contractant un lien salutaire, et compense ainsi, et au delà, la dépense qu'elle entraîne nécessairement.

L'assurance sur la vie se réduirait donc à une sorte de caisse d'épargnes, si on ne la considérait qu'au point de vue de l'opération étudiée ci-dessus, et si elle se réduisait à conserver les versements des déposants, pour les répartir soit entre les vivants, soit entre les familles des décédés, après l'expiration d'un nombre d'années invariablement fixé d'avance. C'est en effet sous cette forme qu'elle a débuté, c'est là tout ce que réalisaient les anciennes tontines, ainsi que les associations tontinières en cas de décès ; mais, depuis lors, l'invention de combinaisons nouvelles, sans changer la nature de l'assurance sur la vie au point de vue financier, est venue lui communiquer une puissance infiniment plus grande, et lui donner le caractère d'une véritable assurance. Le contractant est devenu un assuré, et il y a trouvé d'immenses avantages, non pas financiers, mais moraux, qui sont très-précieux pour lui, tout en ne coûtant rien aux Compagnies, parce qu'ils résident non dans l'importance des sommes garanties, mais dans l'opportunité de leur payement.

191. Pour qu'une assurance sur la vie ait véritablement le caractère d'une assurance proprement dite, il faut qu'elle ait pour résultat la réparation d'un dommage non pas direct (nous avons vu que c'était impossible), mais d'un dommage indirect. Examinons donc quels sont les dommages indirects qu'un particulier peut éprouver par suite du décès ou de la vie de certaines personnes, et qui peuvent être réparés par des assurances sur la vie. Nous laisserons de côté dans cette analyse tout ce qui tient aux sentiments, à l'affection, admettant que les dommages que l'on peut éprouver dans cet ordre d'idées ne sont pas susceptibles de réparation pécuniaire, et nous ne nous occuperons que des dommages matériels, susceptibles d'une réparation de ce genre.

Tout homme qui produit plus qu'il ne consomme cause par son décès, à la famille qui aurait profité de l'excédant de sa production, un dommage indirect qui commence à se produire le jour même du décès ; un contrat d'assurance sur la vie produira donc son maximum d'effet utile s'il met un capital à la disposition de cette famille, immédiatement après son décès. Tel est, en effet, le résultat produit par la combinaison d'assurance la plus féconde qui soit en usage, l'assurance pour la vie entière sur la tête du chef de famille. Le calcul du montant du capital que la Compagnie peut payer au décès se fait toujours sur les mêmes bases. Ce capital n'est que le produit des sommes versées par les divers contractants, réparti entre les familles des décédés, après prélèvement par la Compagnie de la portion qui constitue le coût de l'assurance. Il n'y a là rien de nouveau; mais, si l'on a soin de faire l'assurance sur la tête du chef de la famille, ce produit sera distribué à chaque famille, précisément au moment où elle en a besoin, au moment où, sans cela, elle aurait commencé à souffrir d'un dommage indirect. Le chef de famille qui aura opéré de la sorte n'est donc plus un simple contractant : il devient un assuré. L'immense avantage de l'opportunité compense, et bien au delà, la perte que les contractants font en moyenne sur leur opération d'assurance. D'ailleurs, il n'y a perte que

pour la masse des contractants considérée en moyenne, mais il n'y a pas perte pour chacun d'eux, bien loin de là. Si l'on suppose un grand nombre de contractants s'assurant à l'âge de 30 ans, chacun pour un capital de 10 000 francs, moyennant une prime annuelle de 214 francs (chiffre qui peut être admis pour celui de la prime), et si l'on admet que ces épargnes annuelles (dans le cas où ils les auraient conservées au lieu de les consacrer à l'assurance) leur auraient rapporté 5 pour 100 en intérêts simples, supposition raisonnablement large, on reconnaît qu'il aurait fallu des placements continués pendant 30 ans pour produire à chacun le capital de 10 000 francs. Ainsi toutes les familles où le décès de l'assuré surviendra dans un délai de 30 années, non-seulement jouiront du bénéfice de l'opportunité, mais encore recueilleront un capital plus fort que celui qu'elles auraient obtenu sans l'assurance. La perte en capital sera reportée sur les familles où l'assuré aurait vécu au delà de l'âge de 60 ans, et encore ces familles jouiront-elles également du bénéfice de l'opportunité, en recueillant le capital liquide précisément au moment où elles en auront besoin. En nombre, ces familles, qui éprouveront, par le fait de l'assurance, une perte plus ou moins forte, représentent dans cet exemple les deux tiers de celles qui ont contracté; mais ce sont précisément celles qui peuvent le plus équitablement et le plus facilement supporter cette perte. En effet, d'après notre hypothèse, ces familles auront profité pendant 30 ans au moins de l'excédant de produits réalisé par l'assuré, qui n'aura certainement pas consacré cet excédant tout entier au payement de sa prime annuelle de 214 francs.

Ici apparaît donc le caractère éminemment moral et salutaire de l'assurance sur la vie. Dans son essence, elle n'était qu'un contrat aléatoire, susceptible d'applications bonnes ou illusoires, ou même mauvaises : c'est par un procédé d'application, c'est par l'ingénieuse combinaison appelée *assurance pour la vie entière*, qu'elle devient une véritable assurance, qu'elle prend du même coup l'un des premiers

rangs parmi les institutions sociales, et qu'elle affirme une destination de la plus haute portée, que l'on peut appeler une *destination providentielle*. Au point de vue moral, on peut encore remarquer que, dans cette combinaison, la prime est payée par celui qui ne doit jamais profiter lui-même du capital; un contrat de ce genre répond donc aux plus nobles aspirations du cœur humain.

L'assurance pour la vie entière n'étant en définitive qu'un procédé, et non un principe, n'acquiert sa haute portée que quand elle est judicieusement appliquée, quand elle répond à un besoin; hors de ces conditions, elle pourrait se réduire à une opération financière, et, comme alors elle n'aurait plus pour elle l'avantage immense de l'opportunité du payement du capital, elle perdrait du même coup tous ses caractères bienfaisants, ne présenterait plus d'avantages pour les contractants : elle se réduirait alors à un jeu de hasard. Pour s'en convaincre, il suffit de comparer les opérations de deux particuliers, faisant tous deux vivre leur famille par leur travail, et dont le premier s'assurerait au profit de ses enfants, tandis que l'autre, en faisant les mêmes versements, assurerait un même capital payable aussi à ses enfants, mais au décès d'une personne étrangère. Le premier aura judicieusement agi, et aura bien fait une véritable assurance, parce que le payement du capital assuré par lui viendra s'appliquer à la réparation d'un dommage; mais, quant au second, le décès de la personne étrangère qu'il a choisie ne devant occasionner aucun dommage indirect, le capital, quand il sera payé, n'aura aucun dommage à réparer, ne répondra à aucune opportunité; l'opération se réduirait donc à ce qu'est l'assurance sur la vie dépourvue de toute direction intelligente, à une convention aléatoire ne présentant aucun caractère respectable, et pouvant amener pour sa famille perte ou bénéfice, suivant les chances du hasard.

Les autres opérations d'assurances en cas de décès, assurances temporaires, de survie, mixtes, etc., sont combinées de manière à s'appliquer à diverses situations sociales; elles

ont le même caractère que l'assurance pour la vie entière, mais à la même condition, c'est-à-dire pourvu qu'elles soient judicieusement appliquées.

L'assurance en cas de décès n'est donc généralement avantageuse que pour les personnes qui produisent plus qu'elles ne consomment ; elle doit en conséquence se développer principalement dans les époques et dans les sociétés qui comportent un grand nombre de situations de ce genre. Elle était inconnue au temps passé, alors que quelques familles vivaient sur une fortune acquise, tandis que le plus grand nombre pouvait à peine, par son travail, subvenir à ses besoins les plus impérieux ; mais, dans notre siècle, l'état social est tout différent : les grandes fortunes acquises disparaissent et ne suffisent plus à faire vivre leurs propriétaires; d'un autre côté, la société est en possession d'un outillage industriel et intellectuel très-puissant, qui permet à chacun de ses membres de gagner facilement par son travail bien plus qu'il ne faut pour subvenir à ses besoins personnels. Dans un semblable état social, l'assurance en cas de décès doit se développer et se développe en effet rapidement. Elle est favorisée par une grande expansion du travail et des idées de prévoyance ; elle est au contraire entravée par le développement du luxe, qui empêche les épargnes de se former. A une même époque, elle doit être très-florissante dans les pays où l'on vit principalement de son travail, et très-peu dans les pays où une partie de la population ne peut par son travail que subvenir à ses besoins journaliers, tandis que l'autre partie vit sur une fortune acquise. C'est ce qui arrive en réalité : les États-Unis, l'Angleterre, la France, l'Italie, la Turquie représentent à peu près à cet égard les divers degrés de l'échelle.

192. Nous avons examiné la position de l'homme qui produit plus qu'il ne consomme : il nous reste à examiner la position inverse, celle de l'homme qui consomme plus qu'il ne produit. Celui-là n'aurait aucune raison pour assurer un capital payable après son décès, car ce décès ne doit causer

autour de lui aucun dommage matériel. C'est, au contraire, son existence qui est, pour sa fortune acquise et par conséquent pour lui-même, une cause permanente de dommage matériel, puisque cette existence se traduit à chaque instant par la consommation d'une partie de sa fortune. Si donc il veut réparer ce dommage matériel indirect, c'est une assurance en cas de vie qu'il devra contracter.

Dans ce cas, il pourra adopter la combinaison que nous avons analysée plus haut; mais il ne réalise ainsi (s'il opère pour une durée de 15 ans environ, et si son âge est compris entre 3 et 40 ans) qu'un capital représentant le produit de ses propres versements, avec les intérêts capitalisés à 5 $\frac{1}{2}$ pour 100. Il ne trouve donc dans l'assurance en cas de vie qu'une caisse d'épargnes, et l'avantage le plus marquant qu'il en retire, c'est qu'il s'oblige lui-même à faire des économies et à en accumuler les intérêts. Quant à la question d'opportunité du recouvrement d'un capital liquide, elle ne vient pas le favoriser comme dans la combinaison en cas de décès, parce que le dommage auquel il a à parer tient à une cause permanente, la vie, et non à une cause occasionnelle, comme le décès; qu'en conséquence il ne se présente, dans sa situation personnelle, aucun moment où une somme liquide à toucher arrive plus à propos que dans tout autre.

Le peu d'avantages qu'il retire de la combinaison ainsi appliquée tient à ce que cet assuré ne peut profiter que des capitaux versés par les autres assurés, ayant opéré comme lui et décédés avant le terme de l'assurance. Or, pour les âges en question, le nombre des personnes qui décèdent dans le cours d'une période de 20 années n'est en moyenne que $\frac{1}{6}$ du nombre initial : le profit qui peut en résulter pour chacun des survivants est donc très-peu élevé. Il n'en serait plus de même si l'on contractait à un âge où la mortalité est très-forte, c'est-à-dire soit à la naissance, soit dans l'extrême vieillesse, et il en résulterait alors pour les survivants un bénéfice considérable.

Supposons, en effet, que l'on contracte pour un enfant à sa naissance, et que l'on verse un capital de 1000 francs pour

en recevoir le produit 3 ans après. Sur 1000 naissances, il ne reste, d'après la Table de Duvillard, que 625 vivants à l'âge de 3 ans. Si donc la Compagnie, ainsi que dans les autres assurances en cas de vie, ne prélève rien sur le capital produit, elle pourra distribuer à chacun des survivants à l'âge de 3 ans $1000 \frac{1000(1,04)^3}{625}$ ou 1800 francs, ce qui représente un placement à intérêts simples à 27 pour 100. Un vieillard obtiendrait des résultats encore bien plus considérables en faisant un même versement de 1000 francs à l'âge de 90 ans pour en recevoir le produit 7 ans après; en effet, comme il ne reste à cette époque que 9 vivants sur 1460, chacun des survivants aurait à recevoir $1000 \frac{1460 \times (1,04)^7}{9}$ ou 213400 francs, ce qui représente un placement à intérêts simples à 3000 pour 100, et un placement à intérêts composés à 136 pour 100 par an.

Ces deux opérations, qui ne représentent que la combinaison initiale poussée à l'extrême dans un sens ou dans l'autre, n'ont jamais été appliquées. La première pourrait l'être, car elle correspond à un besoin; le capital touché par l'enfant à l'âge de 3 ans pourrait compenser pour sa famille les charges que doit entraîner son entretien et son éducation. Quant à la seconde, elle ne répond à aucun besoin réel, et, n'apportant pas la réparation d'un préjudice matériel, elle ne serait plus qu'une spéculation financière.

On a trouvé, pour l'assurance en cas de vie, comme pour l'assurance en cas de décès, une combinaison ingénieuse qui permet de lui faire rendre son maximum d'effet utile, et de la vivifier en l'adaptant aux besoins d'un grand nombre de personnes : c'est la rente viagère, immédiate ou différée. Cette combinaison apporte bien la réparation d'un dommage, et cette réparation se produit d'une manière continue, répondant ainsi au dommage, qui provient lui-même d'une cause permanente, la vie, et se perpétue tant que cette cause subsiste.

Cette combinaison est au moins aussi développée que l'assurance en cas de décès, si l'on tient compte non-seulement des rentes viagères servies par les Compagnies d'assurances, mais encore de celles qui sont servies par des particuliers, des pensions de retraites garanties par l'État, par les sociétés industrielles, par les sociétés de secours mutuels, etc.... Cependant elle est toujours affectée du même inconvénient qui a été signalé plus haut, et qui est de produire peu pour les survivants, pendant la durée presque entière de l'existence. Cela tient à ce que les survivants ne peuvent jamais avoir à se partager que le produit des versements faits par les décédés, lesquels sont en nombre relativement faible; et, comme c'est là un fait inhérent à la nature même du sujet, et non pas un accident résultant d'un procédé d'opération, toute assurance en cas de vie, quelle que soit la combinaison adoptée, présentera toujours le même défaut, sauf dans la première enfance et dans l'extrême vieillesse.

En général, l'assurance en cas de vie n'est avantageuse que pour les personnes qui, à un moment donné, consommeront plus qu'elles ne produiront; elle doit, en conséquence, se développer principalement dans les époques et dans les sociétés qui comportent un grand nombre de situations de ce genre. Inconnue aux États-Unis, elle est peu usitée en Angleterre; elle l'est davantage en France. Ce mode d'assurance a de plus contre lui les meilleurs sentiments du cœur humain, qui apportent au contraire, comme nous l'avons vu tout à l'heure, un grand secours au développement de l'assurance en cas de décès. Par celle-ci, on peut réparer les dommages dont sont menacés ceux que l'on aime; par l'assurance en cas de vie, on ne peut au contraire réparer que ceux dont on est menacé dans sa propre personne.

En résumé, l'assurance sur la vie (soit en cas de vie, soit en cas de décès), présente deux avantages qui cependant ne sont pas absolus, mais relatifs; le premier est un avantage sur les placements de fonds : il est relatif à l'importance des fonds versés; le second est un avantage d'opportunité :

il est relatif à l'adaptation de la combinaison choisie à la position personnelle du contractant. L'assurance réalise invariablement pour l'assuré un placement de fonds à 4 pour 100 en intérêts composés; un particulier n'y trouve donc d'avantages réels que s'il y engage des fonds qui ne représentent pas pour lui des capitaux, mais seulement des épargnes : l'avantage est alors d'autant plus grand qu'il opère pour une durée plus longue. L'assurance fournit des capitaux liquides qui arrivent au moment précis où l'on en a besoin pour réparer un dommage matériel; mais, pour cela, il faut que chacun choisisse habilement la combinaison qui s'adapte à sa convenance personnelle; s'il n'en est pas ainsi, l'assurance sur la vie se réduit à un simple jeu de hasard. Enfin l'assurance en cas de décès offre plus d'avantages que l'assurance en cas de vie, parce que, les décès étant en petit nombre, disons, par exemple, de 1 sur 3 (pour les périodes ordinairement adoptées), il y a une seule famille qui prélève un profit sur le versement des deux autres, tandis que, dans l'assurance en cas de vie, les décès étant également en petit nombre, disons 1 sur 6 (pour les périodes ordinairement adoptées), il y a 5 personnes qui prélèvent un mince profit sur le versement d'une seule.

Calcul des primes.

Les opérations d'assurances sur la vie se divisent, comme nous l'avons dit tout à l'heure, en deux classes : les assurances en cas de décès et les assurances en cas de vie. Dans les premières, la Compagnie aura des engagements à remplir, c'est-à-dire des capitaux ou des rentes à payer à certaines époques, si un ou plusieurs décès se présentent; dans les secondes, au contraire, si une ou plusieurs personnes sont en vie. Il y a des opérations qui présentent à la fois les deux caractères réunis : ce sont celles où la Compagnie aura des engagements à remplir s'il arrive à la fois qu'à une époque déterminée telle personne est en vie et telle autre est décédée.

On les nomme *assurances de survie*, parce qu'en effet la Compagnie n'a en réalité d'engagements à remplir que si la première personne a survécu à la seconde, et on les classe parmi les assurances en cas de décès.

PREMIÈRE CLASSE.

Assurances en cas de décès.

193. Pour calculer les primes des assurances en cas de décès, il faut adopter une Table de mortalité qui représente aussi exactement que possible la mortalité des personnes à assurer. Ainsi que nous l'avons dit au n° 60, on soumet les personnes à assurer à un examen médical, et l'on n'accepte pas celles qui présentent, soit à cause de leur santé, soit en raison d'autres circonstances, des chances exceptionnelles de décès. Celles qui sont admises, après cette élimination, forment la classe assurable, et il faut choisir, parmi les différentes Tables de mortalité énumérées dans les Chapitres V et VI, celle qui devra leur être appliquée.

Les Tables dressées sur des groupes de population, dont il est question dans le Chapitre VI, ne sont pas employées pour cet usage; elles sont considérées comme trop inexactes, et l'on n'applique que des Tables de mortalité dressées sur des têtes choisies.

En France, les premières Compagnies d'assurances sur la vie se sont fondées en 1819, 1829, 1830, etc. On ne connaissait guère alors pour notre pays d'autres Tables de mortalité que celles de Duvillard et de Deparcieux, et ni l'une ni l'autre ne pouvait représenter exactement la mortalité de la classe assurable. La Table de Deparcieux, dressée pour des associés tontiniers, devait accuser une mortalité trop faible; car on n'entre dans une association de ce genre que si l'on se reconnaît d'assez grandes chances de longévité. La Table de Duvillard, au contraire, accusait déjà à cette époque une mortalité trop élevée. Il aurait donc fallu, pour se rapprocher

de l'exactitude, augmenter les primes calculées avec la première Table, ou diminuer les primes calculées avec la seconde; mais dans quelle proportion? C'est ce qu'il était impossible de déterminer. Les premières Compagnies qui s'établirent adoptèrent donc pour base de leurs calculs la Table de Duvillard sans correction, et calculèrent les primes d'après les formules (80) et autres analogues, c'est-à-dire en supposant que le capital assuré était payé au commencement de l'année dans laquelle arrive le décès. Elles pensèrent avec raison :

1° Qu'en fondant en France une industrie nouvelle il valait mieux procéder avec grande prudence, et ne prendre chacun des engagements qui constituent les polices qu'à un prix largement rémunérateur;

2° Qu'il fallait, indépendamment des primes nécessaires pour faire face aux engagements, garder une certaine marge pour les frais généraux et pour les bénéfices à allouer aux capitaux engagés;

3° Qu'il serait toujours temps plus tard, si l'on reconnaissait que la Table de Duvillard conduisait décidément à des primes trop élevées, de procéder, après l'expérience d'un certain nombre d'années, par voie de réduction, ce qui aurait beaucoup moins d'inconvénients que de procéder par voie d'augmentation.

L'expérience démontra que la Table de Duvillard accusait une mortalité trop élevée pour les têtes jeunes, et trop faible pour les âges très-avancés, ce qui a été mis en lumière d'une manière plus précise par la comparaison de cette Table avec la Table anglaise, ainsi que nous l'avons dit au n° 146. En conséquence, les Compagnies furent amenées à augmenter les primes ainsi calculées pour les âges avancés, mais à adopter en même temps, en faveur des assurés, une combinaison ingénieuse qui consiste à répartir entre eux, suivant certaines proportions, la moitié des bénéfices réalisés par la Compagnie : cette mesure atténue les inconvénients que présente la trop grande élévation des tarifs. Nous reviendrons en détail,

dans le Chapitre XII, sur cette importante question de la participation dans les bénéfices, qu'il nous suffit d'indiquer sommairement ici. Les Compagnies font également usage, pour presque toutes les combinaisons d'assurances, d'un second tarif, ne donnant pas droit à la participation, et dans lequel les primes sont réduites : la réduction est généralement de 10 pour 100 de la prime, calculée d'après la Table de mortalité de Duvillard.

Sur les treize Compagnies qui existent actuellement en France, onze emploient ces deux séries de tarifs. La Compagnie du *Soleil*, fondée en 1872, peu de temps après la publication des résultats de la nouvelle expérience anglaise, a calculé tous ses tarifs en prenant pour point de départ la Table de mortalité H^{MF}, et les formules (78) et analogues, c'est-à-dire en supposant que le capital est payé à la fin de l'année du décès, et en augmentant les primes ainsi calculées dans certaines proportions. Dans l'assurance sur la vie entière, elle a de plus introduit ces deux conditions : que l'assuré, pourvu toutefois qu'il ait contracté avant 50 ans, n'aura plus de prime à payer quand il aura atteint l'âge de 80 ans, et que le capital lui sera payé à 85 ans, sans attendre l'époque de son décès. Cette assurance est donc en réalité, pour ceux qui contractent avant l'âge de 50 ans, une assurance mixte à primes temporaires (*voir* plus loin n° 209). Toutes ces assurances se font sans participation dans les bénéfices, ce qui se comprend, puisque cette combinaison n'est qu'un artifice destiné à compenser l'élévation des primes, quand on les calcule au moyen de la Table de Duvillard. Cependant, pour les motifs que nous aurons à indiquer dans le Chapitre XII, cette Compagnie a également adopté, pour les assurances sur la vie entière à primes viagères, et indépendamment de son tarif principal, le tarif commun aux onze autres Compagnies, c'est-à-dire le tarif calculé d'après Duvillard, et tempéré par la participation dans les bénéfices.

Enfin la Compagnie *la Famille,* fondée en 1875, a pris une sorte de moyen terme : elle a adopté tous les tarifs communs

aux onze Compagnies, sauf pour l'assurance sur la vie entière sans participation, combinaison pour laquelle elle applique le tarif de la Compagnie du *Soleil*, en adoptant également la clause relative aux octogénaires.

On trouve donc actuellement en vigueur, dans les Compagnies françaises, trois tarifs différents pour les principales combinaisons d'assurances : le premier, calculé d'après la Table de Duvillard, avec quelques modifications, et tempéré par la participation dans les bénéfices; le deuxième, reproduisant le premier avec une réduction de 10 pour 100; le troisième, calculé d'après la Table H^{MF}, avec un chargement; dans l'examen que nous aurons à en faire, nous désignerons ces trois tarifs par les lettres A, B et C.

194. La prime, calculée exactement d'après une Table de mortalité quelconque, s'appelle *prime pure;* lorsque cette Table, comme celles qui résultent de l'expérience anglaise, représente aussi exactement que possible la mortalité de la classe assurée, la prime pure représente la valeur réelle du risque couru, et un tarif qui serait calculé d'après les primes pures ne donnerait à la Compagnie ni perte, ni bénéfice; quand on emploie l'une de ces Tables, comme on l'a fait pour calculer les tarifs C, il faut donc augmenter les primes obtenues dans une certaine proportion, pour faire face aux frais et pour donner un bénéfice rémunérant les capitaux engagés. Cette augmentation, que l'on fait subir aux primes pures, se nomme *chargement.* De nombreuses discussions se sont élevées entre les Actuaires anglais, pour savoir comment ce chargement devait être opéré : les uns voulant que, pour un même capital assuré, le chargement de la prime annuelle fût fixe; les autres qu'il restât proportionnel à la prime elle-même; d'autres enfin qu'il se composât d'une partie fixe et d'une partie proportionnelle, et allant même jusqu'à déterminer la relation qui devait exister entre la partie fixe et la partie proportionnelle du chargement. La prime représentant la valeur exacte du risque couru, c'est-à-dire le prix de re-

vient de la marchandise vendue, qui est ici l'engagement pris par la Compagnie, il paraît assez naturel d'adopter un chargement proportionnel; cependant un chargement fixe a de son côté l'avantage de donner lieu, sur l'ensemble des primes payées, à un prélèvement total proportionnel à l'importance du service rendu à l'assuré. En effet, ce service rendu, qui est la garantie de sécurité, se renouvelle à chaque instant; et sa valeur actuelle est proportionnelle à l'annuité continue reposant sur la tête de l'assuré, ou, ce qui est équivalent en pratique, à l'annuité ordinaire payable d'avance. Or le chargement fixe de la prime annuelle produit précisément sur l'ensemble des primes à verser un chargement total proportionnel à l'annuité payable d'avance : donc ce chargement fixe donne bien lieu sur l'ensemble de l'opération à un prélèvement total proportionnel à l'importance du service rendu; mais de telles considérations, qui peuvent avoir leur valeur au point de vue théorique, perdent toute leur importance quand on passe à la pratique. En réalité, on doit considérer le chargement comme un élément qui permet à l'assureur de faire porter à son gré le bénéfice sur telle ou telle catégorie d'affaires, ou, dans une même catégorie, sur tel ou tel âge. Le choix d'un mode de chargement est donc uniquement une question pratique; et de même que, dans l'industrie, le vendeur ne se croit pas obligé de proportionner son bénéfice sur chaque marchandise vendue au prix de revient de cette marchandise, pas plus qu'au service rendu à l'acheteur, de même chaque Compagnie chargera plus ou moins les primes d'une catégorie d'affaires, suivant qu'elle voudra plus ou moins en favoriser le développement; elle fera de même pour les divers âges, dans une même catégorie. Encore faut-il reconnaître qu'une différence dans le mode de chargement produit dans les chiffres du tarif des variations tellement faibles, que leur influence sur le développement de telle ou telle catégorie d'affaires est au moins douteuse.

Enfin, dans la pratique, une Compagnie qui établit ses tarifs est toujours obligée de faire grandement entrer en ligne

de compte, pour le choix du mode de chargement qu'elle a à adopter, les nécessités de la concurrence des autres Compagnies opérant dans le même pays, de même qu'un fabricant fixe le prix de vente de ses produits moins d'après leur prix de revient que d'après le prix de vente des produits similaires sur le même marché. On doit seulement tenir à ce que le prix de vente ne soit jamais inférieur au prix de revient, c'est-à-dire à ce que la prime du tarif ne soit, pour aucune combinaison d'assurances, inférieure à la prime pure, puisqu'alors la Compagnie se mettrait en perte sur les affaires de ce genre, même abstraction faite de ses frais généraux. Cette anomalie se présente cependant quelquefois pour certains tarifs d'assurances en cas de décès, comme nous le verrons par la suite.

En passant en revue chacune des combinaisons d'assurances usitées dans la pratique, nous indiquerons comment sont établis les tarifs français, c'est-à-dire quelles modifications on a fait subir aux primes calculées d'après la Table de Duvillard, et quels chargements on a adoptés pour les primes calculées d'après la Table H^{MF}.

195. Les principales opérations d'assurances en cas de décès peuvent se diviser en plusieurs catégories qui sont résumées ci-après :

Assurances pour la vie entière....	*Sur une seule tête.*
»	*Sur plusieurs têtes.*
Assurances temporaires..........	*Ordinaire.*
»	*Assurances d'annuités.*
Assurances mixtes..............	*Proprement dites.*
»	*A terme fixe.*
Assurances de survie............	*Pour un capital.*
»	*Pour une rente.*
Prêts viagers.	

Nous allons les passer successivement en revue.

Assurance pour la vie entière sur une seule tête.

196. L'assurance pour la vie entière est un contrat par lequel la Compagnie s'engage à payer un capital déterminé lors du décès de l'assuré, à quelque époque qu'il arrive. Pour prix de cet engagement, l'assuré peut, à son choix, payer à la Compagnie ou une prime unique ou des primes annuelles constantes, exigibles elles-mêmes soit pendant toute la durée de sa vie, soit pendant un temps limité, ou des primes annuelles croissant ou décroissant avec l'âge, etc.

Prime unique. — Si l'assuré paye une prime unique, le montant de cette prime doit être égal à la valeur actuelle du capital, payable après le décès, valeur qui a été calculée au n° 173. Elle est, par conséquent, pour un capital assuré de 1 franc,

$$P_a = 1 - \overline{X_a} \log \text{nép.} (1 + t) \tag{76}$$

si l'on suppose que le capital est payé au moment du décès;

$$P_a = 1 - t X_a \tag{80}$$

si l'on suppose qu'il est payé ou qu'il est disponible dans la caisse au commencement de l'année dans laquelle arrive le décès; et enfin

$$P_a = \frac{1 - t X_a}{1 + t} \tag{78}$$

si l'on suppose qu'il est payé à la fin de l'année du décès. Cette dernière valeur est la moins élevée des trois : c'est celle pour laquelle tous les calculs sont établis d'avance dans les ouvrages anglais cités plus haut. Dans les exemples numériques qui vont suivre, nous appliquerons la formule (78) lorsque nous emploierons la Table de mortalité anglaise, et la formule (80) lorsque nous aurons recours à la Table de Duvillard.

Il faut d'abord remarquer que l'on peut, au moyen des

nombres calculés d'avance dans la Table de commutation et indiqués plus haut au n° **146**, obtenir très-simplement la valeur de P_a, supposée déterminée par la formule (78). Celle-ci donne en effet, en la rapprochant des relations (45) et (49),

$$(114)\qquad P_a = \frac{1 - t\dfrac{N_a}{D_a}}{1+t} = \frac{D_a + N_a - (1+t)N_a}{(1+t)D_a} = \frac{M_a}{D_a}.$$

Toutes ces primes sont donc faciles à calculer par logarithmes.

Exemple. — Quelle est la prime unique à payer pour assurer un capital de 10 000 francs, payable au décès d'une personne âgée de 32 ans?

On cherche d'abord cette prime unique pour un capital de 1 franc, et on la multiplie ensuite par 10 000. Si l'on emploie la Table de Duvillard, et que l'on suppose le capital payable en commencement d'année, il faut appliquer la formule (80), qui donne

$$X_{32} = 14,710,$$

$$P_{32} = 1 - 0,04 \times 14,710 = 0,4116.$$

La prime unique cherchée est donc $0^{fr},4116$ pour 1 franc, ou 4116 francs pour 10 000 francs.

Si l'on veut employer la Table H^M, et supposer le capital payable au moment même du décès, il faut appliquer la formule (76) :

$$\overline{X_{32}} = 17,270,$$

$$P_{32} = 1 - 17,270 \times \text{log nép. } 1,04 = 0,3187.$$

Si l'on veut employer la Table H^M et supposer, comme nous le ferons par la suite, le capital payable en fin d'année, il faut appliquer la formule (78)

$$X_{32} = 16,774,$$

$$P_{32} = \frac{1 - 0,04 \times 16,774}{1,04} = 0,3164;$$

soit 3164 francs pour assurer un capital de 10 000 francs. Cette dernière prime est celle qui figure dans le tableau des résultats donnés à la fin du volume. Elle peut également s'établir sous la forme (114)

$$P_{32} = \frac{M_{32}}{D_{32}} = \frac{7978,77}{25217,7} = 0,3164.$$

On ne fait, pour ainsi dire, jamais d'assurances pour la vie entière à primes uniques; nous avons vu, dans la première partie de ce paragraphe, que le payement par primes annuelles constituait pour l'assuré une combinaison beaucoup plus féconde, et c'est en effet celle qui est universellement employée. Ce mode de payement comprend lui-même plusieurs variétés; car les primes peuvent être payables pendant toute la vie de l'assuré, ou pendant un certain temps seulement; elles peuvent être constantes, ou aller en augmentant ou en diminuant d'année en année.

Comme le risque de décès d'une tête déterminée va en augmentant d'année en année, ce qu'il y aurait de plus logique, ce serait que la prime allât elle-même en augmentant suivant la même progression : elle serait alors égale chaque année à la probabilité de décès, c'est-à-dire au rapport entre le nombre des décès et le nombre des vivants; mais, comme les assurés n'auraient alors aucun intérêt à maintenir leurs polices en vigueur après un temps quelconque écoulé, il se ferait naturellement une sélection de risques dans un sens très-défavorable à la Compagnie : les assurés restés bien portants abandonneraient leur contrat, tandis que ceux dont la santé se serait affaiblie le maintiendraient en vigueur. On se trouverait donc en présence d'une classe assurée dont la mortalité ne correspondrait à aucune des Tables connues, et irait en augmentant avec le temps beaucoup plus rapidement qu'elle ne devrait le faire sous la seule influence de l'âge. Aussi un tarif de ce genre n'a-t-il jamais été appliqué par aucune Compagnie. D'ailleurs, en raison des habitudes de la vie civile, on aime assez à payer tous les ans la même prime; la combi-

naison la plus usitée est donc celle d'une prime annuelle constante, payable pendant toute la durée de la vie.

Prime annuelle constante. — Dans cette combinaison, si l'on veut déterminer le montant de la prime annuelle à payer, on le calculera, comme il a été dit au n° 178, par la formule (96), qui donne, pour l'exemple ci-dessus, relatif à l'âge de 32 ans,

$$p_{32} = \frac{P}{1 + X_{32}}.$$

Cette prime annuelle, pour un capital de 10 000 francs, sera donc

$$\frac{4116^{fr}}{1 + 14,710} = 262^{fr}$$

si l'on emploie la Table de Duvillard, et

$$\frac{3164^{fr}}{1 + 16,774} = 178^{fr}$$

si l'on emploie la Table H^M. Dans ce dernier cas, cette valeur peut également s'établir par le calcul suivant :

$$p_{32} = \frac{M_{32}}{N_{31}} = \frac{7978,77}{448210,8} = 0,0178.$$

On remarquera qu'il y a entre les primes annuelles calculées par deux Tables de mortalité différentes une divergence plus grande qu'entre les primes uniques : le rapport entre les deux primes uniques est 77 pour 100, tandis que le rapport entre les deux primes annuelles est seulement 68 pour 100. Cela se comprend facilement; car, lorsqu'on fait l'opération à primes annuelles, l'influence d'une mortalité plus grande se fait sentir de deux manières : 1° en obligeant la Compagnie à payer plus tôt, comme dans le cas de la prime unique; 2° en privant plus vite la Compagnie de l'encaissement des primes, ce qui n'arrive pas dans le cas de la prime unique.

Tarifs en usage. — Le tarif A applique exactement les primes uniques et les primes annuelles calculées au moyen des formules qui précèdent et de la Table de mortalité de Duvil-

lard, mais jusqu'à l'âge de 60 ans seulement; au delà de l'âge de 60 ans, il augmente toutes ces primes de 10 pour 100.

Le tarif B applique les primes du tarif A, diminuées de 10 pour 100.

Pour établir le tarif C, on a calculé les primes annuelles pures d'après la Table H^{MF}, qui donne des résultats un peu plus élevés que la Table H^{M}, et l'on n'a tenu compte de la clause relative aux octogénaires qu'au moyen du chargement, qui est, jusqu'à l'âge de 60 ans, de 15 pour 100 de la prime, plus 15 centimes pour 100 francs de capital assuré, et, au delà de l'âge de 60 ans, de 25 pour 100 de la prime. Pour les primes uniques, afin d'obtenir un chargement équivalent, on a adopté pour chaque âge la prime unique correspondant à la prime annuelle chargée, correspondance qui est établie par la formule

$$P = \frac{p(1+t)}{p+t},$$

déduite elle-même facilement des formules fondamentales (80) et (96). On arrive ainsi aux tarifs résumés par extraits dans le tableau ci-après :

ASSURANCE POUR LA VIE ENTIÈRE.

Primes uniques et annuelles assurant un capital de 10 000 francs.

AGE.	PRIMES PURES		TARIF A		TARIF B		TARIF C	
	A PRIME UNIQUE.	A PRIMES ANNUELLES.	A PRIME UNIQUE.	A PRIMES ANNUELLES.	A PRIME UNIQUE.	A PRIMES ANNUELLES.	A PRIME UNIQUE.	A PRIMES ANNUELLES.
21	2495	128	3478	201	3130	181	3102	170
30	3027	167	3991	249	3592	224	3616	214
40	3794	235	4686	328	4217	295	4400	294
50	4794	354	5594	466	5035	419	5407	433
60	5977	571	6663	713	5997	642	6582	687
61	6101	602	7451	822	6706	740	6843	768
70	7195	987	8521	1284	7669	1156	7887	1255

Bénéfice moyen de l'opération. — On ne peut pas évaluer d'avance le bénéfice fait sur une seule opération, attendu qu'il est entièrement subordonné à l'époque du décès de l'assuré; on ne peut évaluer que le bénéfice moyen, en admettant que l'on fait un grand nombre d'opérations semblables, et que la mortalité annuelle des assurés se conforme exactement à la Table de mortalité qui se rapproche le plus de la réalité, c'est-à-dire à la Table H^M : c'est ce bénéfice moyen que nous appellerons, dans cette combinaison comme dans toutes les autres, *bénéfice de l'opération.*

Dans l'assurance sur la vie entière, si elle est faite à prime unique, le bénéfice est égal à la différence entre la prime unique appliquée et la prime unique pure; si elle est faite à primes annuelles, il est égal à l'annuité à l'âge d'entrée, payable d'avance, multipliée par le chargement, c'est-à-dire par la différence entre la prime appliquée et la prime pure. On devra prendre ici l'annuité calculée d'après la Table H^M, annuité viagère si la prime est exigible pendant toute la vie, comme dans les tarifs A et B, et annuité temporaire si la prime n'est exigible que jusqu'à un certain âge, comme dans le tarif C. On trouve ainsi que le bénéfice d'une assurance sur la vie entière de 10 000 francs ressort, suivant le tarif employé, aux sommes indiquées dans le tableau ci-après. Dans les calculs relatifs au tarif C, on a tenu compte de la clause relative aux octogénaires :

ASSURANCE POUR LA VIE ENTIÈRE

A PRIME UNIQUE OU A PRIMES ANNUELLES.

Bénéfice moyen d'une assurance de 10 000 francs.

AGE D'ENTRÉE.	Tarif A		Tarif B		Tarif C	
	A PRIME UNIQUE.	A PRIMES ANNUELLES.	A PRIME UNIQUE.	A PRIMES ANNUELLES.	A PRIME UNIQUE.	A PRIMES ANNUELLES.
21	983	1427	635	1037	602	806
30	964	1505	565	1034	582	824
40	892	1498	423	965	595	891
50	800	1514	241	877	613	1067
60	686	1480	20	737	605	1208
61	1350	2222	605	1401	742	1685
70	1326	2169	474	1265	692	1958

La comparaison des chiffres de ce tableau permet de faire les remarques suivantes :

Dans un même tarif et à un même âge, le bénéfice est plus grand sur une assurance pour la vie entière contractée à primes annelles que sur la même assurance contractée à prime unique. La raison en est que le fait de charger les primes, soit que le chargement ait lieu directement, comme dans le tarif C, soit qu'il résulte de l'adoption d'une Table de mortalité trop rapide, comme dans les tarifs A et B, revient à adopter pour l'annuité une valeur plus faible que la réalité. Donc la prime annuelle est plus chargée que la prime unique, puisque, en multipliant cette prime annuelle par 1 plus l'annuité adoptée, on doit reproduire la prime unique. Il est entendu que le bénéfice plus grand fait sur la prime annuelle suppose que cette prime est payée jusqu'au décès ; si l'assurance était abandonnée plus tôt, l'importance du bénéfice dépendrait entièrement de la valeur de rachat donnée à la

police; nous ne pourrons aborder ce point que dans le Chapitre XI.

Dans le tarif A, le bénéfice fait sur la prime unique va en diminuant quand l'âge d'entrée augmente; cela se comprend facilement, le bénéfice étant dû à l'adoption d'une Table de mortalité trop rapide pour les âges jeunes, et se rapprochant de la réalité, devenant même trop lente pour les âges avancés. Dans ce même tarif, il n'en est pas tout à fait de même pour les assurances faites à primes annuelles. Le bénéfice fait sur ces opérations résulte de deux éléments : l'un est le chargement de la prime unique, l'autre est la diminution de l'annuité, qui produit un nouveau chargement sur le facteur $\frac{1}{1+X_a}$. Or, tandis que le premier élément diminue à partir de l'âge de 21 ans, le second, au contraire, augmente, et le résultat définitif offre des variations dans les deux sens.

Au delà de 60 ans, les primes uniques et annuelles étant toutes augmentées de 10 pour 100 de leur valeur, il se produit dans le bénéfice, tant à prime unique qu'à prime annuelle, une augmentation brusque, et la diminution continue ensuite à se faire sentir pour les âges dépassant 61 ans.

Dans le tarif B à primes annuelles, le bénéfice d'une opération diminue constamment quand l'âge augmente de 21 ans à 60; la raison en est que la prime du tarif A est diminuée de 10 pour 100 de sa valeur, c'est-à-dire d'une quantité toujours croissante; qu'ainsi le chargement n'augmente plus que très-faiblement en valeur absolue, tandis que le temps pendant lequel on profitera de ce chargement diminue rapidement. Le tarif B à prime unique ne correspond nullement au même tarif à primes annuelles; les primes à un même âge ne sont plus liées entre elles par la relation fondamentale (96), et la prime unique étant diminuée de 10 pour 100 de sa valeur, c'est-à-dire d'une quantité qui augmente avec l'âge, le bénéfice ou chargement de la prime unique diminue rapidement quand l'âge augmente; il devient presque nul à 60 ans, la prime restant à peine supérieure à la prime unique pure,

ou à la valeur réelle du risque, tandis qu'à cet âge il restait encore un bénéfice sur l'opération faite à primes annuelles. A partir de 61 ans, il y a, comme dans le tarif A, une augmentation brusque dans le bénéfice obtenu, tant à prime unique qu'à primes annuelles; et la diminution continue ensuite à se faire sentir pour les âges dépassant 61 ans.

Dans le tarif C à primes annuelles, le bénéfice augmente constamment à mesure que l'âge est plus avancé, et augmente d'une manière progressive. Dans le même tarif à prime unique, le bénéfice est à peu près constant depuis 21 ans jusqu'à 60; il est plus élevé, mais avec marche décroissante, de 61 à 70 ans.

Il serait facile d'établir un tarif qui donnerait un bénéfice constant, quel que soit l'âge d'entrée; mais il vaut mieux, comme le font les tarifs usuels, réserver un bénéfice plus fort pour les âges avancés. La raison en est que toutes les Tables de mortalité connues reposent, pour les âges avancés, sur un trop petit nombre de têtes (*voir* n° 93), qu'elles ne donnent par conséquent que des résultats incertains, et que toute incertitude doit se payer.

Primes annuelles payables sur la tête d'un tiers. — Le payement de la prime annuelle pourrait reposer sur une autre tête que l'assurance proprement dite : ainsi, le capital assuré restant payable au décès d'une personne de 32 ans, les primes annuelles pourraient être payables du vivant d'une autre personne âgée, par exemple, de 40 ans. Cette combinaison ne répondrait pas aux besoins de la pratique, mais il serait facile de calculer le montant de la prime. La prime unique ne changerait pas, et la prime annuelle s'obtiendrait, ainsi qu'il a été dit au n° 178, en la divisant par $1 + X_{40}$. La prime annuelle serait donc, dans cette hypothèse,

$$\frac{3164}{1+15,135} = 196^{\text{fr}}.$$

Primes temporaires. — Pour éviter d'avoir une prime à payer pendant toute la durée de sa vie, on choisit quelquefois la

combinaison dite *à primes temporaires*, dans laquelle les primes ne sont exigibles que pendant un certain nombre d'années, même dans le cas où l'assuré vit plus longtemps. Cette combinaison est plus rassurante pour l'esprit; et, si le délai choisi atteint 25 à 30 ans, elle conduit à des primes à peine plus élevées que les primes viagères. Le délai choisi est assez ordinairement de 20 années, et alors la prime est un peu plus élevée. Si l'assuré veut payer une prime temporaire, c'est-à-dire exigible pendant n années seulement, les payements seront au nombre de n, le premier étant fait d'avance, et cesseront, dans tous les cas, à son décès. Les primes seront alors déterminées par la formule (97)

$$ {}_{n}p_{a} = \frac{\mathrm{P}}{1 + {}_{n-1}\mathrm{X}_{a}}. $$

Supposons qu'il s'agisse toujours de l'assurance d'un capital de 10000 francs au décès d'une tête de 32 ans, et que l'assuré veuille en acquitter le prix au moyen de primes payables pendant 20 ans au plus, et reposant sur sa tête. P est toujours égal à 3164 francs; ${}_{19}\mathrm{X}_{32}$ est égal à 12,070; par conséquent, la prime cherchée sera

$$ {}_{20}p_{32} = \frac{3164}{1 + 12,070} = 242^{\text{fr}}. $$

Tarifs en usage. — Pour ce mode de payement des primes, le tarif A est exactement conforme aux résultats du calcul fait d'après la Table de Duvillard. Le tarif B donne les mêmes primes, diminuées de 10 pour 100. Le tarif C donne les primes calculées d'après la Table H^{MF}, et augmentées d'un chargement de 10 pour 100, plus 25 centimes pour 100 francs de somme assurée.

Bénéfice de l'opération. — Le bénéfice moyen d'une opération s'obtiendra en multipliant le chargement réel, c'est-à-dire la différence entre la prime annuelle de chaque tarif et la prime pure calculée d'après la Table H^{M}, par l'annuité temporaire payable d'avance, et calculée également d'après la Table H^{M}. Le tableau ci-après indique ce bénéfice moyen pour

divers âges d'entrée, en supposant qu'il s'agisse d'une assurance de 10000 francs, et de primes payables pendant 20 ans, durée qui est la plus adoptée.

ASSURANCE POUR LA VIE ENTIÈRE

A PRIMES TEMPORAIRES DE VINGT ANNÉES.

Primes annuelles et bénéfice moyen d'une assurance de 10 000 francs.

AGE D'ENTRÉE.	TARIF A.		TARIF B.		TARIF C.	
	PRIMES ANNUELLES.	BÉNÉFICE.	PRIMES ANNUELLES.	BÉNÉFICE.	PRIMES ANNUELLES.	BÉNÉFICE.
21	276	1184	248	811	242	731
30	324	1227	292	807	288	754
40	396	1243	356	734	364	836
50	517	1301	463	688	486	936

Primes croissantes. — Au lieu d'acquitter le prix de l'assurance au moyen de primes annuelles constantes, l'assuré veut quelquefois se libérer au moyen de primes qui sont plus faibles pendant les premières années, et plus fortes dans la suite de l'existence, de manière à rétablir la balance. On ne peut jamais descendre, pour les premières primes, au-dessous d'une limite qui est marquée par la prime d'assurance temporaire d'un an, c'est-à-dire par la probabilité de décès pendant l'année dont il s'agit; nous avons même vu, dans le commencement de ce numéro, qu'en raison de l'anti-sélection des risques, on ne pouvait pas, dans la pratique, descendre aussi bas dans les premières années; toutes les primes d'un tarif de ce genre doivent être maintenues plus fortes que les primes de l'assurance temporaire d'un an. On peut cependant, tout en observant cette règle, donner satisfaction, dans une certaine mesure, aux assurés qui voudraient s'acquitter au moyen de primes croissantes; et voici, dans ce cas, comment on effectuera le calcul.

Supposons qu'on veuille payer une prime qui reste constante pendant les cinq premières années, puis qui augmente par périodes de cinq ans, l'augmentation étant à chaque fois de $\frac{1}{5}$ de la valeur initiale, et qui reste constante après la quatrième période, c'est-à-dire après la vingtième année d'assurance écoulée. Les primes à recevoir pendant la première période forment une annuité temporaire payable d'avance; celles des trois périodes suivantes sont des annuités temporaires différées, et celles de la cinquième et dernière période forment une annuité différée. On voit donc, en se reportant aux formules (68), (71) et (65), que la valeur totale des primes, en appelant p la prime initiale, sera la suivante :

Pour la première période...	$p(1 + {}_4X_{32})$,
Pour la deuxième période...	$\frac{6p}{5}\,{}_5X^{4}_{32}$,
Pour la troisième période...	$\frac{7p}{5}\,{}_5X^{9}_{32}$,
Pour la quatrième période..	$\frac{8p}{5}\,{}_5X^{14}_{32}$,
Pour la cinquième période..	$\frac{9p}{5}\,X^{19}_{32}$.

ce qui se réduit à

$$\frac{p}{D_{32}}\left(N_{31} + \frac{N_{36} + N_{41} + N_{46} + N_{51}}{5}\right).$$

C'est cette valeur qui devra être posée égale à la prime unique, ce qui donnera une équation permettant de déterminer p. Remplaçant les nombres connus par leurs valeurs, on obtient ainsi

$$\frac{621760}{25218}\,p = P = 3164^{\text{fr}},$$

d'où

$$p = 128^{\text{fr}}.$$

Les primes à payer seront donc :

Pendant la première période, de	128^fr	par an.
Pendant la deuxième période, de	153,60	»
Pendant la troisième période, de	179,20	»
Pendant la quatrième période, de	204,80	»
Le reste de la vie.........	230,40	»

Primes décroissantes. — Quelquefois les assurés désirent au contraire payer dans les premières années des primes plus fortes que ne seraient les primes constantes, afin d'en payer de plus faibles par la suite. Il n'y a pas ici de limite à observer dans l'élévation relative des premières primes; on peut aller dans ce sens jusqu'à acquitter en un seul payement le prix entier de l'assurance, ce qui revient à contracter à prime unique.

Le calcul des primes s'effectue exactement comme le précédent. Ce calcul revient à déterminer la valeur d'une annuité variable reposant sur la tête assurée; on pourra donc, si on le préfère, appliquer les formules (92) et (95), trouvées au n° 177. C'est ainsi que nous allons procéder dans l'exemple suivant.

Supposons qu'au lieu d'acquitter la prime unique de 3164 francs, assurant, à l'âge de 32 ans, un capital de 10000 francs, on veuille payer une prime qui diminue tous les ans de $\frac{1}{30}$ de sa valeur initiale, et qui conserve la faculté de devenir négative après les trente ans écoulés, c'est-à-dire qu'à la trente et unième échéance le versement sera nul, que la trente-deuxième donnera lieu au payement de $\frac{1}{30}$ de la prime initiale, fait par la Compagnie à l'assuré; la trente-troisième échéance, à un payement de $\frac{2}{30}$, et ainsi de suite. On demande quelle doit être la valeur initiale de la prime.

D'après la formule (95), cette valeur sera égale à

$$\frac{P}{(1+X_a)\left(1-\frac{1}{30}\frac{S_a}{N_{a-1}}\right)}.$$

Soit dans l'exemple proposé

$$\frac{3164^{\text{fr}}}{17,774\left(1-\frac{1}{30}\frac{6047838}{448211}\right)}=323^{\text{fr}},50.$$

Ainsi la prime à payer la première année devra être de $323^{\text{fr}},50$, et cette prime diminuera tous les ans de $\frac{1}{30}$ de sa valeur initiale, c'est-à-dire de $10^{\text{fr}},80$; le trente et unième

payement sera nul, le trente-deuxième sera de 10fr,80 en faveur de l'assuré, et ainsi de suite.

Tarifs en usage. — Les assurances à primes croissantes et décroissantes sont très-peu usitées; une seule Compagnie a publié des tarifs à ce sujet, et elle applique le tarif C, en chargeant les primes de 15 pour 100, plus 15 centimes pour 100 francs.

Primes rapportant un intérêt fixe. — L'assuré demande quelquefois que toutes les primes payées par lui rapportent en sa faveur un intérêt fixe, à partir du jour où elles sont versées à la Compagnie; on comprend que leur valeur doit alors être beaucoup augmentée.

Pour effectuer le calcul dans ce cas, il n'y a qu'à se reporter à la formule (112); et si l'on appelle θ le taux annuel d'intérêt que les primes versées doivent rapporter à l'assuré, l'importance de la prime annuelle sera donnée par la formule

$$\pi = \frac{PD_a}{N_{a-1} - \theta S_a} = \frac{M_a}{N_{a-1} - \theta S_a}.$$

Supposons toujours qu'il s'agisse de l'âge de 32 ans; en remplaçant M, N et S par leurs valeurs, et faisant successivement $\theta = 1, 2, 3$ et 4 pour 100, on trouve que la prime annuelle à demander pour 10000 francs doit être :

Si la Compagnie s'engage à payer	1	pour 100 d'intérêt...		206fr.
»	»	2	»	244
»	»	3	»	299
»	»	»	4	387

Tarifs en usage. — Une seule Compagnie pratique cette combinaison et fixe à 3 pour 100 l'intérêt annuel qu'elle s'engage à payer sur les primes versées : elle applique sans modification le tarif A, calculé d'après Duvillard, pour l'assurance ordinaire sur la vie entière. Or on reconnaît que les primes résultant de ce calcul sont inférieures de 10 à 15 pour 100 (suivant les âges) aux primes pures calculées d'après la Table anglaise, qui donnent la mesure exacte du risque. Ainsi, à 32 ans, la prime pure que nous venons de calculer

ressortait à 299 fr.; la prime appliquée n'est que de 262 fr.; c'est donc une anomalie qu'il est utile de signaler : non-seulement il ne reste rien pour payer les frais, mais la prime ne suffit même pas pour couvrir le risque couru.

Assurance pour la vie entière sur deux têtes, payable au premier décès.

197. Cette assurance est un contrat par lequel la Compagnie s'engage à payer un capital au premier décès de deux personnes désignées.

Prime unique. — La prime unique correspondante doit être égale à la valeur actuelle de cet engagement, valeur qui a été calculée au n° **175**. Elle est par conséquent, pour un capital assuré de 1 franc,

$$1 - \overline{X}_{a,b} \log \text{nép.} (1 + t)$$

si l'on suppose que le capital est payé au moment même du décès, et

$$P_{a,b} = \frac{1 - t X_{a,b}}{1 + t},$$

si l'on suppose que le capital est payé à la fin de l'année dans laquelle arrive le décès.

Exemple. — Si les deux personnes assurées sont âgées de 30 et de 40 ans, on a $\overline{X} = 13,728$, et la première valeur de la prime est 0,4616; on a d'un autre côté $X = 13,232$, et la deuxième valeur de la prime unique est 0,4526, soit 4526 francs pour un capital assuré de 10000 francs.

Prime annuelle. — Si l'on veut calculer la prime annuelle correspondante, en convenant qu'elle ne sera elle-même payable que jusqu'au premier décès, il faut se reporter à ce qui a été établi au n° **171**, où l'on a trouvé

$$p_{a,b} = \frac{P}{1 + X_{a,b}},$$

soit, dans l'exemple actuel et pour la deuxième hypothèse,

$$p_{30,40} = \frac{4526^{\text{fr}}}{1 + 13,232} = 318^{\text{fr}}.$$

Tarifs en usage. — Le tarif A est calculé exactement d'après la Table de Duvillard, au moins jusqu'à 60 ans; le tarif B donne les mêmes primes, diminuées de 10 pour 100. Quant au tarif C, bien que la Compagnie qui l'applique fasse profiter les assurés, comme dans les assurances sur une seule tête, de la clause relative aux octogénaires, les primes y sont établies sans tenir compte de cette clause autrement que par le chargement. Les primes annuelles sont calculées d'après la Table anglaise, et chargées de 10 pour 100 et de 60 centimes; et les primes uniques sont établies de manière à correspondre aux primes annuelles chargées, comme dans l'assurance sur la vie entière. Nous donnons dans le tableau ci-après un extrait de ces tarifs, en supposant, pour simplifier, qu'il s'agisse de deux têtes du même âge.

ASSURANCE POUR LA VIE ENTIÈRE

SUR DEUX TÊTES.

Primes uniques et annuelles assurant un capital de 10 000 francs.

AGE commun des deux têtes.	PRIMES PURES		TARIF A		TARIF B		TARIF C	
	UNIQUE.	ANNUELLE	A PRIME unique.	A PRIMES annuelles.	A PRIME unique.	A PRIMES annuelles.	A PRIME unique.	A PRIMES annuelles.
21	3471	205	4806	344	4325	310	4422	296
30	4061	263	5313	418	4782	376	4926	360
40	4866	364	5962	537	5366	483	5618	470
50	5880	549	6798	755	6118	680	6511	670
60	7008	901	7740	1164	6966	1048	7531	1050

Le bénéfice moyen d'une opération s'obtient comme ci-dessus : le tableau suivant en indique le montant pour quelques âges. Dans le calcul du bénéfice relatif au tarif C, on a tenu compte de la clause relative aux octogénaires.

ASSURANCE POUR LA VIE ENTIÈRE

SUR DEUX TÊTES.

Bénéfice moyen d'une assurance de 10 000 francs.

AGE commun des deux têtes.	TARIF A		TARIF B		TARIF C	
	A PRIME UNIQUE.	A PRIMES ANNUELLES.	A PRIME UNIQUE.	A PRIMES ANNUELLES.	A PRIME UNIQUE.	A PRIMES ANNUELLES.
21	1335	2368	854	1784	951	1553
30	1252	2393	721	1744	865	1497
40	1096	2303	500	1582	752	1408
50	918	2206	238	1403	631	1296
60	732	2048	— 42	1145	523	1162

Ainsi, à l'âge de 60 ans, la prime unique du tarif B, loin de laisser un bénéfice, n'est plus suffisante pour couvrir le risque. Cela tient à ce que les primes calculées d'après Duvillard n'ont été augmentées, dans cette opération comme dans l'assurance sur une seule tête, qu'au delà de 60 ans; mais l'âge de 60 ans, pour deux têtes assurées conjointement, équivaut à l'âge de 68 ans environ pour une seule tête.

Si l'on voulait que la prime annuelle fût payable sur une seule tête, ou jusqu'au second décès, ou dans toute autre condition, on n'aurait qu'à appliquer les formules trouvées aux n°s 178, etc., mais on n'arriverait pas à constituer une opération pratique.

Assurance pour la vie entière sur deux têtes, payable au dernier décès.

198. Cette assurance est un contrat par lequel la Compagnie s'engage à payer un capital après le décès de deux personnes désignées.

Prime unique. — La prime unique correspondante doit

être égale à la valeur actuelle de cet engagement ; or cette valeur est égale à celle de deux assurances sur chacune des têtes considérées isolément, moins la valeur d'une assurance sur les deux têtes au premier décès. On a donc pour la prime unique cherchée

(115) $$P_{\overline{a,b}} = P_a + P_b - P_{a,b}.$$

Exemple. — Quelle est la prime unique de l'assurance d'un capital de 10000 francs, payable au dernier décès de deux personnes, âgées de 30 et de 40 ans ?

On a, d'après la Table H^M,

$$P_{30} = 0,3026, \quad P_{40} = 0,3794, \quad P_{30,40} = 0,4526,$$

d'où l'on conclut

$$P_{\overline{30,40}} = 0,2294,$$

soit 2294 francs pour un capital de 10,000 francs.

Prime annuelle. — La prime annuelle se calculera comme précédemment, et sa valeur dépendra des conditions dans lesquelles elle devra être payée.

Dans la pratique, on stipule presque toujours que la prime annuelle est payable jusqu'au moment où le capital assuré devient exigible ; dans cette combinaison, elle sera donc payable jusqu'au dernier décès, et sa valeur ressortira, d'après la formule (106), à

$$p_{\overline{a,b}} = \frac{P_{\overline{a,b}}}{1 + X_{\overline{a,b}}},$$

soit, pour l'exemple choisi, à

$$\frac{2294^{\text{fr}}}{1 + 19,033} = 114^{\text{fr}}.$$

Tarifs en usage. — Le tarif A applique les primes uniques et annuelles calculées d'après la Table de Duvillard, sans augmentation au delà de 60 ans. Le tarif B applique les mêmes primes diminuées de 10 pour 100. Le tarif C applique les primes calculées d'après la Table anglaise, avec un

chargement qui, jusqu'à 50 ans, est de 12 $\frac{1}{2}$ pour 100, plus 12 $\frac{1}{2}$ centimes pour 100 francs de capital assuré. Pour les âges avancés, le tarif B est inférieur au prix du risque couru, surtout à prime unique; ainsi, pour deux têtes de 70 ans, la prime unique pure est de 6,334 francs pour 10000 francs, et la prime unique du tarif B n'est que de 6,185 francs.

On peut encore adopter toute autre combinaison pour le payement de la prime annuelle. Si, par exemple, on veut, dans l'assurance ci-dessus, payer seulement une prime temporaire exigible pendant 15 ans, et reposant sur la tête de l'assuré âgé de 30 ans, sa valeur, d'après la formule (97), sera

$$\frac{P_{\overline{30,40}}}{1+{}_{14}X_{30}} = \frac{2294}{10,957} = 209^{fr},32.$$

Assurance sur trois têtes, payable au premier décès.

199. Nous représenterons les âges des trois assurés par a, b, c; nous supposerons, dans les exemples numériques, que ces âges sont 20, 30 et 40 ans, et que le capital assuré est de 10000 francs.

Prime unique. — Le capital étant toujours supposé payable en fin d'année, la prime unique a pour valeur

$$(116) \qquad P = \frac{1 - t\,X_{a,b,c}}{1+t}.$$

Exemple :

$$X_{20} = 18,644$$
$$X_{30} = 17,131$$
$$X_{40} = 15,135$$
$$X_{20,30} = 15,153$$
$$X_{20,30,40} = 12,36$$
$$P = \frac{1 - 0,04 \times 12,36}{1,04} = 0,486,$$

soit 4860 francs pour 10000 francs de capital assuré.

Prime annuelle. — La prime annuelle, si elle est supposée

payable également jusqu'au premier décès, sera déterminée par la formule

$$\frac{P}{1 + X_{a,b,c}}.$$

Exemple. — Prime annuelle pour 10000 francs de capital assuré :

$$\frac{4860^{fr}}{1 + 12,36} = 364^{fr}.$$

Assurance sur trois têtes, payable au second décès.

200. *Prime unique.* — Elle sera déterminée par la formule

$$P = \frac{1 - t(X_{a,b} + X_{a,c} + X_{b,c} - 2\,X_{a,b,c})}{1 + t}.$$

Exemple :

$$X_{20,30} = 15,153$$

$$X_{20,40} = 13,714$$

$$X_{30,40} = 13,2324$$

$$X_{20,30,40} = 12,36$$

$$P = \frac{1 - 0,04 \times 18,783}{1,04} = 0^{fr},239.$$

soit 2390 francs pour 10 000 francs de capital assuré.

Prime annuelle. — Si la prime annuelle n'est payable que jusqu'au premier décès, elle aura pour valeur

$$\frac{P}{1 + X_{a,b,c}}.$$

Exemple. — Prime annuelle pour 10000 francs de capital assuré :

$$\frac{2390}{1 + 12,36} = 179^{fr}.$$

Si elle est payable jusqu'au second décès, elle aura pour valeur

$$\frac{P}{1 + X_{a,b} + X_{a,c} + X_{b,c} - 2\,X_{a,b,c}}.$$

Exemple. — Prime annuelle pour 10000 francs :

$$\frac{2390}{1+18,783}=121^{fr}.$$

Assurance sur trois têtes, payable au dernier décès.

201. *Prime unique.* — Elle sera donnée par la formule

$$P=\frac{1-t(X_a+X_b+X_c-X_{a,b}-X_{a,c}-X_{b,c}+X_{a,b,c})}{1+t}.$$

Exemple :

$$P=\frac{1-0,04(50,910-42,099+12,36)}{1,04}=0,148,$$

soit 1480 francs pour 10000 francs de capital assuré.

Prime annuelle. — Si la prime annuelle est payable jusqu'au premier ou jusqu'au second décès seulement, elle se déterminera par les formules (105) ou (106). Si elle est payable jusqu'au dernier décès, elle sera donnée par la formule

$$\frac{P}{1+X_a+X_b+X_c-X_{a,b}-X_{a,c}-X_{b,c}+X_{a,b,c}}.$$

Exemple. — Prime annuelle payable jusqu'au dernier décès :

$$\frac{1480}{1+21,169}=67^{fr}.$$

Les assurances sur trois têtes ne sont pas en usage dans la pratique, et aucune Compagnie n'a publié de tarif à ce sujet.

Assurance temporaire.

202. L'assurance temporaire est un contrat par lequel la Compagnie s'engage à payer un capital au décès de l'assuré, si ce décès survient dans un délai déterminé, de une ou plusieurs années. Si, à l'expiration du délai, l'assuré est encore vivant, les primes versées restent acquises à la Compagnie.

Prime unique. — La prime unique ${}_nP_a$ doit être égale à la valeur actuelle de cet engagement, c'est-à-dire à la différence entre le prix d'une assurance vie entière à l'âge a et le prix d'une assurance vie entière à l'âge $a+n$, ce dernier étant ramené à sa valeur actuelle. On a par conséquent

(117) $$ {}_nP_a = P_a - P_{a+n} Q_a^n = \frac{M_a - M_{a+n}}{D_a}. $$

Si l'assurance n'est faite que pour un an, il faut poser $n = 1$, et l'on trouve

$$ {}_1P_a = P_a - P_{a+1} Q_1^a. $$

Comme vérification, si l'on remplace dans cette formule P_a par sa valeur $\frac{1 - tX_a}{1+t}$ et P_{a+1} par la valeur analogue, et enfin X_a par la valeur $Q_a^1 (1 + X_{a+1})$, on trouve

$$ {}_1P_a = \left(1 - \frac{f(a+1)}{f(a)}\right) \frac{1}{1+t}, $$

c'est-à-dire que ${}_1P_a$ se trouve égal à la probabilité de décès pendant l'année, multipliée par $\frac{1}{1+t}$. Cela devrait être, puisqu'il s'agit du prix de l'assurance temporaire pour un an seulement, et que le capital, s'il devient exigible, ne sera payé qu'à la fin de l'année.

Exemple. — Calculer la prime unique de l'assurance temporaire de 10 ans de durée sur une tête âgée de 35 ans.

On aura, d'après la formule (117),

$$ {}_{10}P_{35} = \frac{M_{35} - M_{45}}{D_{35}} = \frac{1708,40}{21864,9} = 0^{fr},0781, $$

soit 781 francs pour une assurance de 10000 francs.

Prime annuelle. — Le mode le plus simple est de fixer une prime annuelle payable pendant toute la durée de l'assurance, c'est-à-dire pendant n années, la prime de chaque année étant payable d'avance. Cette prime est alors déterminée par

la formule (97), qui donne

$$ {}_{n}p_a = \frac{{}_{n}\mathrm{P}_a}{1 + {}_{n-1}\mathrm{X}_a} = \frac{\mathrm{M}_a - \mathrm{M}_{a+n}}{\mathrm{N}_{a-1} - \mathrm{N}_{a+n-1}}. $$

Si l'on préférait que la prime annuelle fût payable pendant un nombre d'années m différent de la durée de l'assurance, il faudrait de même fixer sa valeur à

$$ {}_{m}p_a = \frac{\mathrm{P}}{1 + {}_{m-1}\mathrm{X}_a} = \frac{\mathrm{M}_a - \mathrm{M}_{a+n}}{\mathrm{N}_{a-1} - \mathrm{N}_{a+m-1}}. $$

Exemple. — Calculer la prime annuelle de l'assurance temporaire de 10 ans de durée, sur une tête de 35 ans.

La formule ci-dessus donnera

$$ {}_{10}p_{35} = \frac{\mathrm{M}_{35} - \mathrm{M}_{45}}{\mathrm{N}_{34} - \mathrm{N}_{44}} = \frac{1708}{177\,240} = 0{,}0096, $$

soit 96 francs pour une assurance de 10000 francs.

Tarifs en usage. — Pour l'assurance temporaire, le tarif B applique, jusqu'à l'âge de 60 ans, les primes telles qu'elles sont données par le calcul. Ce tarif n'est pas tempéré par la participation dans les bénéfices, cette participation n'étant pas allouée pour cette catégorie d'affaires : en conséquence, le tarif A n'existe pas. Quant au tarif C, il fait subir un chargement considérable aux primes pures de la Table H^M. La raison en est que les assurés de cette catégorie sont considérés comme formant une classe de risques spécialement dangereux, qui ne sont plus comparables avec les personnes observées pour la formation de la Table de mortalité H^M. En effet, si ces assurances sont faites pour un an ou deux seulement, on doit craindre qu'elles ne soient déterminées par la prévision d'un danger imminent, menaçant la vie de l'assuré; si elles sont faites pour quelques années, comme l'assuré n'a presque aucun intérêt à maintenir sa police en vigueur, puisque celle-ci n'est pas rachetable (*voir* plus loin Chap. XI, *Rachat des contrats*), on doit redouter une sélection de risques défavorable à la Compagnie, analogue à celle que nous avons signalée au n° 196.

Nous donnons ci-après un extrait des tarifs B et C pour les assurances temporaires de la durée d'un an :

ASSURANCE TEMPORAIRE D'UN AN.

Primes assurant un capital de 10000 francs.

AGE.	PRIME PURE.	TARIF B.	TARIF C.
21	65	122	114
30	74	155	150
40	100	189	190
50	153	260	279

Assurance temporaire sur deux têtes.

203. Dans cette combinaison, la Compagnie s'engage à payer un capital au premier décès de deux têtes, si ce décès survient dans un délai déterminé.

Prime unique. — En raisonnant comme au numéro précédent, on verra que, si l'on appelle a et b les âges des deux têtes assurées, la prime unique afférente à cette opération est

$$(118) \qquad {}_{n}P_{a,b} = P_{a,b} - P_{a+n,b+n}\,Q^{n}_{a,b}.$$

Exemple. — Chercher la prime unique de l'assurance temporaire de 10 ans, sur deux têtes âgées de 34 et de 22 ans.

On aura, en appliquant la formule (118),

$${}_{10}P_{34,22} = P_{34,22} - P_{44,32}(1,04)^{-10}\frac{f(44)}{f(34)}\frac{f(32)}{f(22)} = 0^{\text{fr}},127,$$

soit 1270 francs pour 10000 francs de capital assuré.

Prime annuelle. — La prime annuelle, si l'on stipule qu'elle sera payable du vivant des deux têtes assurées, mais seulement pendant m années au plus, sera de même

$$(119) \qquad {}_{m}p_{a,b} = \frac{P}{1 + {}_{m-1}X_{a,b}}.$$

Exemple. — Si $m = n = 10$, c'est-à-dire si la prime est payable jusqu'au moment où le capital assuré devient exigible, on aura

$$ {}_{10}p_{34,22} = \frac{1270^{fr}}{1 + 7,01} = 158^{fr}. $$

L'assurance temporaire sur deux têtes n'est nullement usitée dans la pratique : il n'y a pas eu de tarifs publiés à ce sujet.

Assurance d'annuités.

204. L'assurance d'annuités est un contrat par lequel la Compagnie s'engage, vis-à-vis d'une personne qui doit payer des annuités, à se substituer à elle, à partir de son décès, pour payer au fur et à mesure de leurs échéances les annuités qui resteront alors à échoir. On voit donc que cette opération est une assurance temporaire, faite pour un capital qui variera suivant l'époque du décès de l'assuré.

Prime unique. — Cherchons la prime unique nécessaire pour assurer n annuités de 1 franc, dont le payement repose sur une tête d'âge a.

La valeur actuelle de toutes les annuités à payer est fixe, et ne dépend pas de la durée de la vie de l'assuré; pour 1 franc d'annuités, elle ressort à

$$ \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+t)^n} = \frac{(1+t)^n - 1}{t(1+t)^n}. $$

Au lieu de cela, l'assuré ne payera que pendant sa vie; c'est-à-dire qu'il payera des sommes représentant une rente temporaire sur sa tête, dont la valeur actuelle (n° 167) est $X_a - X_a^n$. La valeur de l'engagement pris par la Compagnie, ou la prime unique de l'opération, est donc égale à la différence

$$ (120) \qquad P = \frac{(1+t)^n - 1}{t(1+t)^n} - (X_a - X_a^n). $$

Exemple. — Chercher la prime unique de l'assurance de

50 annuités de 1000 francs à échoir, sur une tête âgée actuellement de 30 ans.

Il faut faire $a = 30$ et $n = 50$, ce qui donne

$$P = \frac{1,04^{50} - 1}{0,04 \times 1,04^{50}} - (X_{30} - X_{30}^{50})$$
$$= \frac{6,10665}{0,284266} - (17,131 - 0,078) = 4,429,$$

soit, comme prime unique, 4429 francs, si l'annuité à payer est de 1000 francs.

Prime annuelle. — Si l'on veut, au lieu d'une prime unique, calculer une prime annuelle, payable sur la tête de l'assuré lui-même, et pendant n années au plus, il faut appliquer la formule (97), et la prime à payer sera

$$\frac{P}{1 + {}_{n-1}X_a}.$$

Si l'assuré s'engageait à payer une prime annuelle pendant toute la durée de sa vie, et non plus pendant n années seulement, cette prime serait fixée par la formule (96), et serait égale à

$$\frac{P}{1 + X_a}.$$

Dans l'exemple choisi, si l'assuré s'engage à payer la prime annuelle d'assurance pendant les 50 années qui restent à courir pour le versement des annuités, cette prime annuelle sera de $\frac{4429}{1 + 17,030}$ ou 246 francs. S'il s'engage à payer pendant toute la durée de sa vie, et non plus pendant 50 années seulement, la prime annuelle sera de

$$\frac{4429}{1 + 17,131} = 244^{fr}.$$

Ces deux primes sont peu différentes l'une de l'autre, les engagements de l'assuré étant presque équivalents dans l'un et l'autre cas.

L'assurance d'annuités est une opération qui n'est pas passée dans la pratique; il n'y a pas à ce sujet de tarifs en usage.

Remboursement d'annuités.

205. Quand une personne a des annuités à verser dans un but quelconque, elle veut quelquefois assurer le remboursement de ces annuités : ce remboursement peut-être soumis à diverses conditions, que l'on pourrait varier à l'infini. On peut stipuler, par exemple, que toutes les annuités versées seront remboursées par la Compagnie dans n années, sans aucune condition de vie ou de décès; ou bien qu'elles seront remboursées à cette époque, seulement dans le cas où une autre personne d'âge b serait alors vivante, ou bien dans le cas seulement où cette autre personne serait alors décédée.

Soient a l'âge de la personne A, sur la tête de laquelle repose le payement des annuités; n le nombre d'annuités qu'elle a à payer. Si l'on demande à la Compagnie de rembourser ces n annuités dans n années sans condition, la valeur de cet engagement est ${}_nX_a$, valeur de l'annuité temporaire sur la tête A, ramenée à sa valeur actuelle, c'est-à-dire

$$ {}_nX_a \frac{1}{(1+t)^n}. $$

Si le remboursement doit avoir lieu seulement dans le cas où une personne d'âge b serait alors vivante, la valeur de cet engagement est de même

$$ {}_nX_a \frac{f(b+n)}{f(b)} \frac{1}{(1+t)^n}. $$

Si le remboursement doit avoir lieu seulement dans le cas où une personne d'âge b serait alors décédée, la valeur de cet engagement est

$$ {}_nX_a \frac{f(b)-f(b+n)}{f(b)} \frac{1}{(1+t)^n}. $$

Rien n'empêche que la tête B, au sujet de laquelle on fait

ces conditions, soit précisément la même que la tête A, sur laquelle repose le payement des annuités à rembourser : il suffit alors de faire $b = a$ dans les formules qui précèdent.

Ces formules ne donnent que la prime unique; on en déduira les primes annuelles par le mode ordinaire de transformation.

Remboursement d'annuités en cas de survie.

206. *Prime unique.* — On peut stipuler que toutes les annuités versées par la personne A seront remboursées à son décès, mais seulement à la condition qu'une autre personne, d'âge b, sera alors vivante : c'est une clause de remboursement en cas de survie. Le calcul relatif à cette assurance a été indiqué par M. Achard, comme suite aux travaux de MM. Woolhouse, Sutton et Makeham, sur les assurances de survie, lesquels ont été résumés dans le *Journal des Actuaires français* (t. I, p. 258, 1872).

La combinaison proposée consiste à rembourser, ou à payer, à la condition que A meure avant B, une somme de 1 franc si le décès a lieu dans la première année, de 2 francs s'il a lieu dans la deuxième, de 3 francs s'il a lieu dans la troisième, etc. On peut la remplacer par la combinaison continue qui consiste à rembourser une somme x si l'événement en question arrive précisément en un temps x.

Soit $\overline{Y}_{a,b}$ la valeur de l'annuité continue variable, payable du vivant des deux têtes, cette annuité correspondant à une somme $x\,dx$ payable entre les époques x et $x + dx$, si les deux têtes sont vivantes, et soit Π la prime unique cherchée. On a, d'après le travail précité (*Journal des Actuaires*, p. 260),

$$\Pi f(a) = -\frac{d.\overline{Y}f(a)}{da} = -f(a)\frac{d\overline{Y}}{da} - \overline{Y}f'(a),$$

$$\Pi = -\frac{d\overline{Y}}{da} + \overline{Y}\tau_a,$$

τ étant le taux continu de mortalité de la tête A (*voir* n° 152).

Dans la pratique, cette formule reviendra à

(121) $$\Pi = \overline{Y}_{a,b}\tau_a + \frac{\overline{Y}_{a-1,b} - \overline{Y}_{a+1,b}}{2}.$$

$\overline{Y}$ représente les annuités variables continues; leur valeur se déduira de celles des annuités variables ordinaires Y, qui s'établissent elles-mêmes d'une manière tout à fait analogue aux annuités variables sur une seule tête (n° **177**).

Primes annuelles. — Si l'on veut faire cette même opération en payant, au lieu d'une prime annuelle, une prime unique π, reposant sur les deux têtes A et B, cette prime s'établira comme à l'ordinaire, par la formule (105),

(122) $$\pi = \frac{\Pi}{1 + X_{a,b}}.$$

Les assurances relatives au remboursement d'annuités ne sont pas usitées; il n'a pas été publié de tarif à ce sujet.

Contre-assurance.

207. Comme les opérations qui précèdent, la contre-assurance est une assurance temporaire pour un capital variable, à laquelle a recours un particulier qui s'est engagé à faire des versements annuels dans un but quelconque. Par ce contrat, la Compagnie s'engage, si cet assuré vient à décéder dans un certain délai, à rembourser tous les versements annuels qu'il aurait préalablement effectués.

Prime unique. — Soient a l'âge de l'assuré, n le nombre des versements supposés égaux à 1 franc, dont nous admettrons que le premier s'effectue au moment même où se fait le contrat de contre-assurance. La Compagnie garantit le remboursement du premier versement pendant n années, en cas de décès d'une tête d'âge a : le prix de cet engagement est ${}_nP_a$ (n° **202**). Elle garantira dans un an le remboursement du second versement pendant $n-1$ années sur une tête d'âge $a+1$: le prix de cet engagement *sera alors* ${}_{n-1}P_{a+1}$,

et doit être multiplié par Q_a^1 pour être ramené à sa valeur actuelle. Il en est de même de tous les versements suivants, de sorte que la valeur actuelle totale de l'engagement pris par la Compagnie, ou la prime unique de la contre-assurance, est

$$(123) \qquad {}_nP_a + {}_{n-1}P_{a+1}\,Q_a^1 + \ldots + {}_1P_{a+n-1}\,Q_a^{n-1}.$$

En employant la Table de commutation, et tenant compte des relations (117) et (48), cette valeur se réduit à

$$(124) \qquad \frac{R_a - R_{a+n} - n\,M_{a+n}}{D_a}.$$

Exemple. — Une personne âgée de 20 ans a à verser 18 annuités de 1000 francs chacune. Quelle est la prime de la contre-assurance destinée à assurer le remboursement, à son décès, des annuités qui auront alors été versées ?

Il faut faire $a = 20$ et $n = 18$; la formule précédente donne alors pour la prime unique

$$\frac{R_{20} - R_{38} - 18\,M_{38}}{D_{30}} = 1,237$$

pour des annuités de 1 franc, soit 1237 francs de prime unique si les annuités sont de 1000 francs.

Prime annuelle. — La contre-assurance se paye ordinairement au moyen de primes annuelles, exigibles pendant un temps égal à la durée des versements d'annuités, et reposant sur la même tête. La prime annuelle s'obtient alors par la formule (97)

$${}_np_a = \frac{P}{1 + {}_{n-1}X_a}.$$

Exemple. — Dans l'exemple ci-dessus, ${}_{17}X_{20}$ est égal à 11,506, et par conséquent la prime annuelle ressort à

$$\frac{1237}{1 + 11,506} = 98^{\text{fr}},91.$$

En d'autres termes, le contractant, au lieu de payer une annuité de 1000 francs par an, payera 1000 francs d'une part et

98fr,91 de l'autre ; mais, s'il meurt avant un délai de 18 ans, toutes les sommes de 1000 francs qu'il aura versées seront remboursées par la Compagnie : les primes de contre-assurance, au contraire, demeurent acquises à la Compagnie dans tous les cas.

Prime annuelle, remboursable en cas de décès. — On peut demander que la Compagnie rembourse, en cas de décès de l'assuré, non-seulement les annuités de 1000 francs, mais encore les primes de contre-assurance elles-mêmes. Il faut alors chercher quelle est la valeur de la prime annuelle donnant droit à la fois et à la contre-assurance et à son propre remboursement. En la désignant par π, et en conservant la lettre p pour désigner la prime ordinaire de contre-assurance calculée tout à l'heure, on aura

$$\pi = p(1+\pi) = \frac{p}{1-p},$$

soit, dans l'exemple ci-dessus,

$$\pi = \frac{0,09891}{0,90109} = 0^{\text{fr}},1097.$$

Si l'annuité à contre-assurer est de 1000 francs, il faudra donc verser annuellement une prime additionnelle de 109fr,70, pour que la Compagnie prenne l'engagement de rembourser, en cas de décès, toutes les sommes déboursées, soit à titres d'annuités, soit à titre de primes de contre-assurance.

On appliquait autrefois la contre-assurance au remboursement des annuités versées dans les associations tontinières ; ces associations n'étant plus en usage, on ne l'applique actuellement que comme une opération annexe de l'assurance d'un capital différé ; nous examinerons donc le tarif qui s'y rapporte lorsque nous parlerons de cette dernière catégorie d'affaires.

Assurance temporaire d'un capital variable.

208. L'assurance temporaire peut avoir pour objet de

garantir le payement d'un capital dont l'importance varie suivant l'époque du décès de l'assuré. Supposons que l'on demande à la Compagnie de s'engager à payer un capital c_1 si le décès de l'assuré, dont l'âge est a, survient dans la première année; un capital c_2 si le décès survient dans la deuxième année, etc., et c_n s'il survient dans la $n^{ième}$ année, les capitaux c_1, c_2, c_3,... variant d'année en année, et toute assurance disparaissant si le décès n'est pas survenu dans le délai de n années.

La prime unique d'une semblable assurance est facile à déterminer. En effet, la Compagnie doit être considérée dès à présent comme assurant le plus petit capital c_n pendant n années, plus la différence $c_{n-1} - c_n$ pendant $n - 1$ années, plus $c_{n-2} - c_{n-1}$ pendant $n - 2$ années, etc., plus enfin $c_1 - c_2$ pendant une année. La prime unique sera donc donnée par la formule

$$(125)\quad {}_n\mathrm{P}_a\, c_n + {}_{n-1}\mathrm{P}_a\,(c_{n-1} - c_n) + {}_{n-2}\mathrm{P}_a\,(c_{n-2} - c_{n-1}) + \ldots + {}_1\mathrm{P}_a\,(c_1 - c_2).$$

Le cas le plus simple est celui où les capitaux assurés vont, d'une année à l'autre, en diminuant d'une quantité constante, égale à $\frac{1}{n}$ du capital assuré pendant la première année; de sorte que c_1 peut être représenté par n francs, c_2 par $n - 1$ francs, etc., et enfin c_n par 1 franc.

La prime unique se réduit alors à

$${}_1\mathrm{P}_a + {}_2\mathrm{P}_a + {}_3\mathrm{P}_a + \ldots + {}_n\mathrm{P}_a,$$

ce qui, en tenant compte de la relation (117), prend la forme

$$(126)\quad \frac{n\mathrm{M}_a - (\mathrm{R}_{a+1} - \mathrm{R}_{a+n+1})}{\mathrm{D}_a}.$$

Exemple. — Quelle est la prime unique à verser pour que la Compagnie prenne l'engagement de payer 100000 francs, si le décès d'une personne âgée de 30 ans survient pendant la première année, 95000 s'il survient dans la deuxième année, etc., et enfin 5000 si le décès survient dans la ving-

tième année, tout engagement cessant pour elle, passé ce délai.

Faisons, dans la formule (126), $a = 30$ et $n = 20$, nous aurons pour la prime unique

$$\frac{20 M_{30} - (R_{31} - R_{51})}{D_{30}} = 1^{fr},383.$$

Cette prime unique correspond à l'assurance d'un capital de 20 francs la première année, 19 francs la deuxième, et ainsi de suite. Pour obtenir la prime unique cherchée, il faut donc la multiplier par 5000, ce qui donne 6915 francs.

Prime annuelle constante. — Il ne serait pas possible de remplacer la prime unique par une prime annuelle, payable pendant toute la durée de la vie. En effet, une fois le délai écoulé, la Compagnie ne garantit plus rien, par conséquent le contractant n'aurait plus intérêt à payer les primes suivantes. On ne peut donc stipuler qu'une prime annuelle payable au plus pendant le temps que dure l'assurance.

On tomberait encore dans l'écueil signalé ci-dessus, si l'on voulait stipuler le payement d'une prime annuelle constante, payable pendant toute la durée du délai de garantie, sur la tête de l'assuré. La somme assurée diminuant constamment d'année en année, il arriverait un moment où le risque couru deviendrait plus faible que la prime annuelle; à ce moment, l'assuré n'aurait plus intérêt à continuer ses payements et la Compagnie ne recevrait pas les primes nécessaires pour couvrir les risques importants courus pendant les premières années, ou, ce qui revient au même, pour former l'équivalent de la prime unique afférente à l'opération. Un exemple fera voir à quel moment le risque couru descendrait au-dessous de la prime annuelle.

Exemple. — Conservons les mêmes données, et supposons que l'on veuille remplacer la prime unique ci-dessus par une prime annuelle temporaire, payable pendant 20 ans sur la tête du contractant, âgé de 30 ans. Cette prime sera déterminée par la formule (97) ${}_n p_a = \frac{P}{1 + {}_{n-1}X_a}$, ce qui donnera, en

faisant $a = 30$ et $n = 20$,

$$ {}_{20}p_{30} = \frac{6915}{13,131} = 527^{\text{fr}}. $$

L'assuré aurait donc à payer tous les ans une prime de 527 francs. Or, jusqu'à l'âge de 39 ans, il aurait bien intérêt à payer sa prime; en effet, de 39 à 40 ans, le risque de décès étant 0,010082, et la somme assurée étant encore de 55000 francs, il en résulte une espérance mathématique égale à 555 francs, et par conséquent un peu supérieure à la prime annuelle. Mais, de 40 à 41 ans, le risque de décès est 0,010306, et la somme assurée descend à 50000 francs, ce qui réduit l'espérance mathématique à 515 francs, chiffre inférieur au montant de la prime ; ainsi, à partir de 40 ans, l'assuré n'aurait plus intérêt à payer la prime. Une assurance de ce genre ne peut donc se faire qu'avec une prime annuelle décroissante.

Prime annuelle décroissante. — On peut fixer comme on l'entend la loi de décroissance de la prime annuelle. Ce qu'il y a de plus simple, c'est de supposer qu'elle diminue chaque année d'une même fraction de sa valeur initiale, et qu'elle devient nulle après le délai de l'assurance : la prime de chaque année reste ainsi proportionnelle au capital assuré pendant cette année. Dans ce cas, la prime est une annuité temporaire variable, payable d'avance, et donnée par la formule (92)

$$ Y = (1 + {}_{n-1}X_a)(1 - kU), $$

la valeur de U étant fixée par la relation (93)

$$ U = \frac{S_a - S_{a+n-1} - (n-1)N_{a+n-1}}{N_{a-1} - N_{a+n-1}}. $$

Exemple. — Dans l'exemple proposé, la prime devant diminuer tous les ans de $\frac{1}{20}$ de sa valeur initiale, il faut faire $k = -\frac{1}{20}$; quant à n, on peut lui donner à volonté la valeur 20 ou la valeur 21, attendu que, si l'on considère 21 primes comme devant être payées, la vingt et unième sera nulle.

On trouve, en effet, pour $n = 20$,

$$U = \frac{S_{30} - S_{49} - 19 N_{49}}{N_{29} - N_{49}} = 7{,}89,$$

$$Y = (1 + 12{,}131)(1 - \tfrac{1}{20} 7{,}89) = 7{,}95,$$

et pour $n = 21$

$$U = \frac{S_{30} - S_{50} - 20 N_{50}}{N_{29} - N_{50}} = 8{,}23,$$

$$Y = (1 + 12{,}501)(1 - \tfrac{1}{20} 8{,}23) = 7{,}95.$$

On arrive donc pour l'annuité variable, payable d'avance, à la même valeur $7^{fr},95$; et, par suite, la prime annuelle de l'assurance en question ressort à

$$\frac{6915}{7{,}95} = 870^{fr}.$$

Assurance mixte.

209. On appelle *assurance mixte* un contrat par lequel la Compagnie s'engage à payer un certain capital au décès de l'assuré, si ce décès survient dans un délai fixé, et, à la fin de ce même délai, si l'assuré est alors vivant. Ce nom de *mixte* vient de ce que cette assurance est considérée comme participant à la fois de l'assurance en cas de vie et de l'assurance en cas de décès. Cette assimilation peut être justifiée au point de vue de l'assuré, qui pourra en effet toucher un capital en cas de vie, comme il pourra en laisser un à ses héritiers en cas de décès; mais elle n'est plus exacte au point de vue des définitions de l'assurance en cas de décès et de l'assurance en cas de vie. Cette dernière est une opération, en vertu de laquelle la Compagnie aura un capital à payer si le contractant est vivant à une certaine époque, mais n'aura pas de capital à payer si le contractant n'est pas vivant; dans toutes les assurances en cas de vie, la vie du contractant rend exigible, ou au moins aggrave l'engagement pris par la Compagnie, et ce n'est qu'à cette condition qu'une opération

peut rentrer dans la classe des assurances en cas de vie. Or, quand on a contracté une assurance mixte, la vie de l'assuré ne peut en aucun cas aggraver l'engagement pris par la Compagnie. Si la période convenue est de 20 années par exemple, la Compagnie peut être considérée comme prenant à la fois deux engagements : par le premier, elle s'oblige à payer le capital dans 20 ans; c'est là le minimum de l'obligation qu'elle aura à remplir; par le second, elle s'engage, en cas de décès de l'assuré, à anticiper ce payement, ou, ce qui revient au même au point de vue des calculs, à en payer l'intérêt pendant tout le temps qui s'écoulera depuis le décès de l'assuré jusqu'à l'expiration du délai de vingt années. Le décès de l'assuré est donc la seule circonstance qui puisse aggraver l'engagement de la Compagnie; si l'assuré n'est pas décédé dans le cours de 20 années la Compagnie aura le capital à payer, non pas parce que l'assuré sera vivant, mais parce que l'échéance la plus éloignée possible de son engagement sera arrivée. Cela est si vrai que si, à l'expiration de 20 années, on ne pouvait prouver ni l'existence, ni le décès de l'assuré, la Compagnie devrait néanmoins payer le capital convenu. En conséquence, les assurances mixtes sont uniquement des assurances en cas de décès. Cette rectification a son importance au point de vue du choix de la Table de mortalité qu'il faut appliquer pour le calcul de leurs primes. Du reste, sans s'arrêter à l'expression de *mixtes*, toutes les Compagnies emploient pour ces assurances la même Table de mortalité que pour les assurances en cas de décès.

Prime unique. — Il y a plusieurs manières de calculer la prime unique de l'assurance mixte, en décomposant cette opération en plusieurs autres équivalentes.

1° Soient a l'âge de l'assuré, n la durée de l'assurance. Nous supposons le capital payable, en cas de décès, à la fin de l'année du décès. La Compagnie est alors dans la même position que si elle avait fait une assurance temporaire de n années, et si elle s'était engagée en outre à payer le capital dans

n années en cas de vie. La valeur du premier engagement est $P_a - P_{a+n} Q_a^n$; la valeur du second est Q_a^n. En remplaçant P_a et P_{a+n} par leurs valeurs tirées de la formule (78), on obtient pour la prime unique de l'assurance mixte de 1 franc

$$(127) \qquad \frac{1 - t(X_a - X_a^n) + t Q_a^n}{1+t} = P_a + \frac{t}{1+t} \frac{N_{a+n-1}}{D_a}.$$

2° La Compagnie est encore dans la même position que si elle payait de suite le capital, et si elle en touchait l'intérêt pendant $n - 1$ années sur la tête de l'assuré ; la valeur de son engagement est donc $\frac{1 - t\,{}_{n-1}X_a}{1+t}$, valeur qui, d'après la formule (68), est égale à la précédente.

3° La Compagnie peut encore être considérée comme payant le capital au décès, et payant en outre l'intérêt de ce capital, différé de $n - 1$ années, sur une tête d'âge $a + n - 1$. La valeur actuelle de son engagement est donc $P_a + \frac{t X_{a+n-1} Q_a^{n-1}}{1+t}$, ce qui, d'après les formules (78) et (49), revient encore à la valeur précédente.

4° Enfin on peut encore retrouver la même valeur, en supposant que la Compagnie s'engage à payer le capital dans n années, et s'engage, en outre, à en payer l'intérêt, depuis le décès de l'assuré jusqu'à l'expiration de ce délai.

Premier exemple. — Quelle est la prime unique d'une assurance mixte de 10000 francs, d'une durée de 20 années, sur une tête âgée de 30 ans?

Il faut, dans la formule, faire $a = 30$ et $n = 20$, ce qui donne

$$\frac{M_{30}}{D_{30}} + \frac{0,04\, N_{49}}{1,04\, D_{30}} = P_{30} + 0,1923 = 0,4950,$$

soit, pour 10000 francs de capital, une prime unique de 4950 francs.

Deuxième exemple. — Quelle est la prime unique d'une assurance mixte de 10000 francs, faite sur une tête de 32 ans,

pour une durée de 53 ans, le payement du capital devant avoir lieu, au plus tard, à l'âge de 85 ans?

Il faut faire $a = 32$ et $n = 53$, ce qui donne

$$\mathrm{P}_{32} + \frac{0,04\,\mathrm{N}_{84}}{1,04\,\mathrm{D}_{32}} = 0,316396 + 0,001078 = 0,3174,$$

soit 3174 francs pour un capital de 10000 francs. Dans cet exemple, l'échéance de l'assurance mixte étant fixée à un âge très-avancé, on voit que la prime unique est à peine supérieure à la prime unique de l'assurance pour la vie entière.

Prime annuelle. — L'assurance mixte ne peut pas, en pratique, se réaliser par des primes annuelles payables pendant toute la durée de la vie, mais seulement par des primes temporaires, payables au plus pendant le temps assigné pour durée à l'assurance mixte dont il s'agit.

Si ces primes se payent sur la tête assurée et pendant un nombre d'années n égal à la durée de l'assurance, leur importance sera, d'après la formule (97), fixée à

$$\frac{\mathrm{P}}{1 + {}_{n-1}\mathrm{X}_a},$$

soit, dans le premier exemple ci-dessus,

$$\frac{4950}{1 + {}_{19}\mathrm{X}_{30}} = 377^{\mathrm{fr}}.$$

Si les primes devaient se payer seulement pendant un temps m plus petit que n, leur valeur ressortirait de même à

$$\frac{\mathrm{P}}{1 + {}_{m-1}\mathrm{X}_a}.$$

Ainsi, dans le deuxième exemple ci-dessus, si l'on veut que l'assuré n'ait plus de prime à payer à partir de l'âge de 80 ans, comme il est entré à 32 ans, il faut admettre qu'il payera au plus 48 primes, dont la première d'avance; il faut donc faire $m = 48$, ce qui donne pour la prime annuelle

$$\frac{3174}{1 + {}_{47}\mathrm{X}_{32}} = 179^{\mathrm{fr}},75.$$

La prime étant ici exigible jusqu'à un âge avancé, on voit que son montant est de fort peu supérieur au montant de la prime annuelle d'assurance pour la vie entière, qui est 178fr,01.

Tarifs en usage. — Les tarifs des assurances mixtes ont plusieurs fois varié. Actuellement, le tarif A applique les primes calculées d'après la Table de Duvillard, et augmentées de 10 pour 100 de leur valeur. Le tarif B applique les primes du tarif A diminuées de 10 pour 100 de leur valeur. Dans le tarif C, les primes annuelles sont chargées : 1° de 50 pour 100 de la portion aléatoire de la prime, c'est-à-dire de la différence existant entre la prime et l'annuité qui serait nécessaire pour constituer le capital au terme de l'assurance, sans aucune considération de vie ou de décès; 2° de 1 pour 100 de leur valeur; 3° de la somme nécessaire pour constituer au début de l'opération une fraction de 2 pour 100 du capital assuré. Les primes uniques du tarif C ont été calculées en multipliant les primes annuelles chargées par les annuités correspondantes; aussi dans ce tarif une opération donne-t-elle le même bénéfice, soit à prime unique, soit à primes annuelles. Nous donnons, dans le tableau ci-après, un extrait de ces tarifs.

ASSURANCE MIXTE.

D'UNE DURÉE DE 20 ANS.

Primes uniques et annuelles assurant un capital de 10000 francs.

AGE	PRIMES PURES.		TARIF A.		TARIF B.		TARIF C.	
	UNIQUE.	ANNUELLE	PRIME unique.	PRIME annuelle.	PRIME unique.	PRIME annuelle.	PRIME unique.	PRIME annuelle.
21	4825	362	5745	456	5170	410	5572	418
30	4950	377	5890	479	5301	431	5659	431
40	5107	402	6123	518	5511	466	5978	470

Bénéfice de l'opération. — Le bénéfice moyen d'une assurance mixte est égal au chargement de la prime annuelle, multiplié par l'annuité temporaire payable d'avance. Pour une assurance de 20 ans de durée, nous indiquons dans le tableau ci-après les bénéfices réalisés par les tarifs A, B et C.

ASSURANCE MIXTE.

Bénéfice moyen d'une assurance mixte de 10 000 francs, de 20 ans de durée.

AGE	TARIF A.		TARIF B.		TARIF C.	
	A PRIME unique.	A PRIMES annuelles.	A PRIME unique.	A PRIMES annuelles.	A PRIME unique.	A PRIMES annuelles.
21	920	1251	345	638	747	747
30	940	1339	351	709	709	709
40	5016	1476	404	814	868	868

Primes rapportant un intérêt fixe. — L'assuré demande quelquefois que toutes les primes payées par lui pour une assurance mixte rapportent, en sa faveur, un intérêt fixe pendant toute la durée de cette assurance; on comprend que leur valeur doit alors être notablement augmentée.

On effectuera le calcul comme celui qui se rapporte à l'assurance vie entière (n° 196, dernier paragraphe). En appelant P la prime unique de l'assurance mixte, et θ le taux annuel d'intérêt que les primes versées doivent rapporter à l'assuré, le montant de la prime annuelle sera donné par la formule

$$\pi = \frac{PD_a}{N_{a-1} - N_{a+n-1} - \theta\,(S_a - S_{a+n} - nN_{a+n})}.$$

Si l'on applique cette formule à l'exemple précédemment traité, assurance mixte de 10 000 francs de capital et de 20 ans de durée sur une tête de 30 ans, pour laquelle la prime unique est 4950 francs et la prime annuelle ordinaire

377 francs, on trouve que la nouvelle prime annuelle à demander doit être :

Si la Compagnie s'engage à payer	1 pour 100 d'intérêt	. . .	412
»	»	2 »	. . .	454
»	»	3 »	. . .	505
»	»	4 »	. . .	570
»	»	5 »	. . .	652

La prime annuelle du tarif A n'est que de 479 francs; cette prime ne pourrait donc alimenter tout au plus qu'un payement d'intérêt de 2 pour 100 par an sur les primes versées, et encore en absorbant la presque totalité du chargement, qui était destiné à parer aux frais et aux bénéfices. Si l'on voulait, avec le tarif A, allouer un intérêt annuel de plus de 2 pour 100, non-seulement il ne resterait rien pour payer les frais, mais la prime ne suffirait même pas pour couvrir le risque. Du reste aucune Compagnie ne s'engage à servir un intérêt fixe quelconque sur les primes annuelles des assurances mixtes.

Assurance à terme fixe.

210. L'assurance à terme fixe est un contrat par lequel la Compagnie s'engage à payer un capital déterminé à une époque également déterminée. La valeur actuelle de l'engagement de la Compagnie ne dépend d'aucune question de mortalité, mais seulement du taux de l'intérêt. Comme on admet toujours dans les questions d'assurances sur la vie un taux d'intérêt fixe, la valeur de cet engagement peut être calculée, sans qu'il puisse se produire de divergence provenant de la mortalité à survenir.

Prime unique. — Si le délai de payement ou la durée de l'assurance est fixée à n années, la valeur actuelle de l'engagement, ou la prime unique, pour 1 franc de capital, sera

(128) $$P = \frac{1}{(1+t)^n}.$$

Une assurance à terme fixe, contractée à prime unique, ne serait donc pas autre chose qu'un placement de fonds à intérêt composé.

Exemple. — Calculer la prime unique d'une assurance à terme fixe de 10000 francs, pour une durée de 20 ans.

L'âge de l'assuré est indifférent, ou plutôt il n'y a pas de tête assurée, et la prime unique cherchée est

$$\frac{1}{1,04^{20}} = 0^{\text{fr}},4564,$$

pour 1 franc, soit 4564 francs pour 10000 francs.

Prime annuelle. — La prime annuelle est toujours temporaire; elle est généralement payable pendant toute la durée de l'assurance, mais repose sur la tête d'un contractant qui devient un assuré. Les chances de mortalité viennent donc influer sur le temps plus ou moins long pendant lequel les primes seront payées. Si a est l'âge de l'assuré, la prime annuelle temporaire devra être fixée d'après la formule (97), à

$$\frac{P}{1 + {}_{n-1}X_a},$$

soit, dans l'exemple ci-dessus,

$$\frac{4564}{1 + {}_{19}X_{30}} = 347^{\text{fr}},68.$$

Tarifs en usage. — Pour l'assurance à terme fixe, les tarifs A, B et C sont établis exactement sur les mêmes bases que pour l'assurance mixte, que nous avons examinée précédemment. Dans le tableau ci-après, nous donnons un extrait de ces tarifs, et nous indiquons en même temps le bénéfice moyen d'une opération.

ASSURANCE A TERME FIXE.

Primes annuelles et bénéfice moyen d'une assurance à terme fixe de 10000 francs, faite pour une durée de 20 ans.

AGE.	PRIME ANNUELLE PURE.	TARIF A.		TARIF B.		TARIF C.	
		PRIME ANNUELLE.	BÉNÉFICE.	PRIME ANNUELLE.	BÉNÉFICE.	PRIME ANNUELLE.	BÉNÉFICE.
21	342	402	800	362	267	376	453
30	348	412	840	371	302	383	459
40	358	429	903	386	356	401	547

Assurance d'un capital de survie.

211. Cette assurance est un contrat par lequel la Compagnie s'engage à payer un capital déterminé au décès d'une personne déterminée, à la condition qu'une autre personne survive à celle-ci, c'est-à-dire soit encore en vie au décès de la première.

Prime unique. — La prime unique de cette assurance a été calculée au n° **176**, où nous l'avons représentée par $P_{\frac{b}{a}}$, en appelant b la tête assurée et a la tête qui doit survivre, pour que le capital lui soit payé. Nous avons trouvé pour sa valeur

$$P_{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2(1+t)}\left[1 - tX_{a,b} + \frac{f(a+1)}{f(a)}(1+X_{a+1,b}) - \frac{f(b+1)}{f(b)}(1+X_{a,b+1})\right].$$

Cette formule suppose, comme celles que nous avons appliquées précédemment pour d'autres opérations, que le capital assuré est payé à la fin de l'année dans laquelle arrive le décès.

On peut remarquer, à titre de vérification, que si l'on change a en b et réciproquement, et que l'on ajoute les

deux primes uniques ainsi obtenues, on retrouve la prime unique de l'assurance sur deux têtes au premier décès, déjà établie ci-dessus au n° 197.

Exemple. — Soient $a = 40$ et $b = 30$.

$$X_{40,30} = 13,2324,$$
$$X_{41,30} = 13,0767,$$
$$X_{31,40} = 13,1660,$$

$$f(30) = 89865, \quad f(40) = 82284,$$
$$f(31) = 89171, \quad f(41) = 81436.$$

Substituant dans la formule (85) et effectuant les calculs, on trouve en définitive

$$P_{\frac{30}{40}} = 0^{fr},1658,$$

soit 1658 francs pour un capital de 10000 francs.

Prime annuelle. — La prime annuelle repose généralement sur les deux têtes intéressées, et elle est payable jusqu'au premier décès seulement; car, après le premier décès, la Compagnie exécute son engagement ou se trouve complétement libérée. Cette prime annuelle s'établit donc d'après la formule (105) et ressort à

$$(129) \qquad p = \frac{P}{1 + X_{a,b}}.$$

Exemple. — Dans l'exemple qui précède, où $a = 40$ et $b = 30$, la prime annuelle, payable jusqu'au premier décès, sera donc

$$\frac{1658^{fr}}{1 + 13,2324} = 116^{fr}.$$

Tarifs en usage. — Le tarif A applique exactement les primes calculées d'après la Table de Duvillard : ces primes ne sont pas augmentées, même au delà de l'âge de 60 ans. Le tarif B applique les mêmes primes diminuées de 10 pour 100. Le tarif C applique les primes calculées d'après la table anglaise, avec un chargement de 10 pour 100 et de 30 centimes pour 100 francs. Nous donnons, dans le tableau suivant,

un extrait de ces tarifs, en y joignant les primes pures, calculées d'après la Table H^M. Ces primes doivent être considérées, ainsi que pour les autres assurances en cas de décès, comme donnant une mesure du risque aussi exacte que possible, attendu que l'assuré et le bénéficiaire doivent tous deux être en bon état de santé, le premier parce qu'il vient de subir un examen médical, le second parce qu'il ne contracterait pas une assurance à son profit, si sa santé était menacée.

ASSURANCE DE SURVIE.

Primes uniques et annuelles assurant un capital de survie de 10000 francs.

AGES		PRIME PURE.		TARIF A.		TARIF B.		TARIF C.	
du bénéficiaire.	de l'assuré.	unique.	annuelle.	PRIME unique.	PRIMES annuelles.	PRIME unique.	PRIMES annuelles.	PRIME unique.	PRIMES annuelles.
65	20	565	66	972	131	875	118	943	110
20	65	6168	719	6467	874	5820	787	7073	825

Quand l'âge de l'un des deux contractants dépasse 60 ans, les tarifs A et B offrent ici une anomalie. En contractant deux assurances de survie sur les deux têtes, on réalise l'assurance d'un capital payable au premier décès; or, comme les primes, calculées d'après Duvillard, ne sont pas majorées au delà de 60 ans, tandis qu'elles le sont dans l'assurance sur une seule tête, il arrive que la somme des deux primes annuelles, qui constitue la prime de l'assurance au premier décès, est plus faible que la prime d'assurance sur la tête la plus âgée seulement.

Ainsi, aux âges de 20 et 65 ans pris pour exemple dans le tableau qui précède, la somme des deux primes uniques du tarif A, constituant la prime pour un capital payable au

premier décès des deux têtes, ressort à 7439 francs pour 10000 francs, tandis que la prime unique demandée par le même tarif pour assurer 10000 francs au décès de la seule tête de 65 ans est plus forte et s'élève déjà à 7905 francs. La même anomalie se constate sur les primes annuelles si l'on prend les âges de 20 et 70 ans. Elle n'existe pas dans le tarif C.

Nous indiquons dans le tarif ci-après le bénéfice ou la perte moyenne d'une assurance de capital de survie (*voir*, pour ce qui concerne la perte, ce qui est dit plus loin, à propos des assurances de rente de survie, n° 216).

ASSRUANCE DE SURVIE

A PRIME UNIQUE OU A PRIMES ANNUELLES.

Bénéfice moyen de l'assurance d'un capital de survie de 10000 francs.

AGES		TARIF A.		TARIF B.		TARIF C.	
du bénéficiaire.	de l'assuré.	PRIME UNIQUE.	PRIMES ANNUELLES.	PRIME UNIQUE.	PRIMES ANNUELLES.	PRIME UNIQUE.	PRIMES ANNUELLES.
65	20	407	553	310	442	378	378
20	65	299	1268	—348	527	905	905

Prime annuelle temporaire. — On peut encore stipuler que la prime, tout en n'étant payable que jusqu'au premier décès, ne sera également payable que pendant n années au plus. Dans ce cas, elle sera déterminée par la formule (107), qui donne

$$\frac{\mathrm{P}}{1 + {}_{n-1}\mathrm{X}_{a,b}};$$

soit dans l'exemple choisi, et pour une durée de 20 années,

$$\frac{1658^{\mathrm{fr}}}{1 + 10,874} = 140^{\mathrm{fr}}.$$

Primes annuelles remboursables. — Une autre combinaison pour le payement des primes annuelles consiste à stipuler que, si la tête bénéficiaire A vient à décéder avant la tête assurée B, la Compagnie devra rembourser toutes les primes qu'elle aura reçues.

Dans ce cas, on aura recours au mode de calcul exposé au n° 206. Si l'on appelle p la prime annuelle ordinaire de l'assurance de survie, telle qu'elle est donnée par la formule (129), π la prime annuelle assurant le remboursement, en cas de survie de B à A, des annuités de 1 franc versées, et x la prime annuelle de la combinaison proposée, cette dernière devra se composer de p, prime de l'opération principale, et de πx, prime assurant le remboursement. On aura donc

$$x = p + \pi x,$$

ce qui donne

(130) $$x = \frac{p}{1-\pi}.$$

Assurance temporaire d'un capital de survie.

212. L'assurance d'un capital de survie peut être temporaire; elle a alors pour effet d'assurer un capital payable au décès de la tête assurée B, à la condition que la tête bénéficiaire A soit alors en vie, et à la condition que le décès survienne dans un délai déterminé, que nous représenterons par n années.

Prime unique. — La prime unique de cette assurance est égale à la prime unique $P_{\frac{b}{a}}$ de l'assurance de survie contractée sans limite de temps, moins la prime unique d'une semblable assurance contractée aux âges $b+n$ et $a+n$ ramenée à sa valeur actuelle. Pour ramener cette dernière prime à sa valeur actuelle, il faut la multiplier par $Q^n_{a,b}$, puisqu'on n'aura à la contracter dans n années que si A et B sont alors vivants tous deux. La prime unique cherchée est donc

(129) $$P_{\frac{b}{a}} - P_{\frac{b+n}{a+n}} Q^n_{a,b}.$$

Assurance temporaire d'un capital de survie, payable à terme fixe.

213. Cette assurance a pour objet de garantir un capital qui sera payable à une époque fixe, à la double condition qu'une tête assurée B n'existera plus à cette époque, et qu'une tête bénéficiaire A existera encore. Cette combinaison diffère donc de la précédente en ce que le capital n'est pas payable au décès, mais seulement à une époque déterminée d'avance, soit après n années écoulées.

Prime unique. — Si le capital était payable dans n années sans condition, sa valeur actuelle serait $\frac{1}{(1+t)^n}$: cette valeur, c'est-à-dire la prime unique qui la représente, doit donc être réduite à

$$(130)\qquad P = \frac{f(a+n)}{f(a)}\,\frac{f(b)-f(b+n)}{f(b)}\,\frac{1}{(1+t)^n},$$

ce qui peut encore se mettre sous la forme

$$P = Q_a^n - Q_{a,b}^n.$$

Prime annuelle. — La prime annuelle doit reposer sur les deux têtes A et B réunies, et elle ne doit être payable que pendant un nombre d'années m inférieur à n; car, si elle était payable pendant toute la durée du différé, les assurés auraient, vers la fin de ce laps de temps, plus d'intérêt à abandonner leurs contrats qu'à payer leurs primes, c'est-à-dire que la Compagnie ne recevrait pas le prix entier des risques qu'elle aurait eu à courir pendant les premières années. La prime annuelle sera alors donnée par la formule

$$\frac{P}{1 + {}_{m-1}X_{a,b}}.$$

Exemple. — Un père, âgé de 32 ans, veut assurer à son fils, âgé de 2 ans, un capital de 10000 francs, qui devra lui être payé dans 19 ans, mais seulement dans le cas où à cette époque le fils serait vivant, et le père décédé.

La Table de mortalité anglaise n'ayant été établie qu'à partir de l'âge de 10 ans, il faut employer pour cet exemple la Table de Deparcieux, qui du reste s'en rapproche beaucoup pour les parties communes. La prime unique ressort alors, d'après la formule (130), à

$$\frac{806}{1043}\,\frac{718-571}{718}\,\frac{1}{1,04^{19}}=0,0751,$$

soit 751 francs pour un capital assuré de 10000 francs.

Quant à la prime annuelle, si l'on veut qu'elle soit payée pendant 16 ans seulement, c'est-à-dire que les versements cessent quand l'enfant aura atteint l'âge de 18 ans, il faut faire $m=16$, et sa valeur ressort alors à

$$\frac{751}{1+{}_{15}X_{32,2}}=\frac{751}{9,89}=76^{\text{fr}}.$$

Cette combinaison n'a été mise en pratique en France que par une seule Compagnie, sous le nom d'assurance d'un *capital de dotation;* mais son emploi ne s'est pas répandu. Le tarif est établi au point de vue des enfants, comme dans l'exemple qui précède; on a employé pour les adultes la Table de mortalité anglaise, et pour les enfants une Table de mortalité spéciale, qui a été dressée en Angleterre, en 1871, par M. Bowser, sur 1653 têtes d'enfants, et qui est rapportée dans le *Journal des Actuaires anglais* de 1872. Les primes ainsi calculées ont été augmentées d'un chargement de 50 pour 100.

Assurance d'un capital de survie sur trois têtes.

214. Quand il y a trois têtes en jeu, on peut stipuler que le capital assuré sera payable si une tête déterminée meurt la première, ou bien si elle meurt la seconde, ou bien si elle meurt la dernière. Nous examinerons successivement ces trois cas, en désignant par A, B, C les trois personnes en jeu, et par a, b, c leurs âges.

Premier cas. — *Capital payable si A meurt le premier.* — En examinant tous les cas possibles, on arrive, au moyen d'une analyse (qui est donnée en détail dans l'ouvrage de M. Maas : *Théorie élémentaire des annuités viagères*), à trouver que la valeur approximative de la prime unique relative à cette assurance, le capital assuré étant toujours payable en fin d'année, est donnée par la formule suivante, dans laquelle $P_{\frac{a}{b,c}}$ représente la prime unique en question :

$$(131)\quad \left\{\begin{aligned} 3(1+t)P_{\frac{a}{bc}} = 1 - tX_{a,b,c} &- \frac{f(a+1)}{f(a)}(1+X_{a+1,b,c}) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{f(b+1)}{f(b)}(1+X_{a,b+1,c}) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{f(c+1)}{f(c)}(1+X_{a,b,c+1}) \\ &+ \frac{f(b+1)f(c+1)}{f(b)f(c)}(1+X_{a,b+1,c+1}) \\ &- \frac{1}{2}\frac{f(a+1)f(c+1)}{f(a)f(c)}(1+X_{a+1,b,c+1}) \\ &- \frac{1}{2}\frac{f(a+1)f(b+1)}{f(a)f(b)}(1+X_{a+1,b+1,c}). \end{aligned}\right.$$

Second cas. — *Capital payable si A meurt le second des trois.* — La Compagnie est dans le même cas que si elle s'engageait à payer le capital si A mourait avant B, à le payer également si A mourait avant C, mais si elle devait le recevoir deux fois dans le cas où A mourrait le premier des trois. Par conséquent, la prime unique relative à cette assurance sera

$$(132)\qquad P = P_{\frac{a}{b}} + P_{\frac{a}{c}} - 2P_{\frac{a}{bc}}.$$

Troisième cas. — *Capital payable si A meurt le dernier des trois.* — La prime unique est égale à celle d'une assurance sur la tête de A, diminuée des primes uniques assurant le capital, soit dans le cas où A meurt le premier, soit dans le cas où il meurt le second. Elle est, par conséquent, donnée par la formule

$$(133)\qquad P = \frac{1 - tX_a}{1+t} - P_{\frac{a}{b}} - P_{\frac{a}{c}} + P_{\frac{a}{bc}}.$$

Nous ne donnons pas d'exemple relatif aux assurances de survie d'un capital sur trois têtes, parce que la formule (131) exige, pour son application, que les annuités sur trois têtes soient calculées avec une grande approximation, c'est-à-dire avec au moins deux décimales exactes. La raison en est que ces annuités entrent dans la formule (131), les unes avec le signe +, les autres avec le signe —, de sorte que ce sont réellement leurs différences qui restent en jeu, ce qui suppose une assez grande précision. Or la méthode de Simpson, que nous avons indiquée au n° **172**, donne à peine ces annuités avec une décimale exacte; il faudrait donc recourir, pour le calcul des sept annuités qui y figurent, à l'emploi de la formule de Gompertz, ou mieux de celle de Makeham, ce qui serait très-long.

Assurance d'un capital de survie sur plus de trois têtes.

215. Quand il y a plus de trois têtes en jeu, les assurances de survie peuvent donner lieu à des cas particuliers très-nombreux. Nous nous bornerons à en examiner un, à titre d'exemple.

Quatre personnes sont âgées de 20, 30, 40 et 50 ans. On demande quelle est la prime unique nécessaire pour assurer un capital de 100000 francs, payable seulement dans le cas où la tête la plus jeune, âgée de 20 ans, mourrait la première. On demande également quelle est la prime annuelle, supposée payable jusqu'au premier décès.

Soit P la prime unique cherchée, le capital étant payable à la fin de l'année du décès et la Table employée étant la Table H^M. La probabilité que le capital sera exigible à la fin de la première année est

$$\alpha_1 = \frac{f(a)-f(a+1)}{f(a)} \, \frac{f(b+1)f(c+1)f(d+1)}{f(b)f(c)f(d)};$$

la probabilité qu'il sera exigible à la fin de la deuxième an-

née est de même

$$\alpha_2 = \frac{f(a+1) - f(a+2)}{f(a)} \frac{f(b+2)f(c+2)f(d+2)}{f(b)f(c)f(d)},$$

et P aura pour valeur

$$P = \frac{\alpha_1}{1+t} + \frac{\alpha_2}{(1+t)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{46}}{(1+t)^{46}},$$

cette série s'arrêtant au 46ᵉ terme, parce que le nombre des vivants est réduit à 0 à l'âge de 97 ans.

La prime unique peut ainsi se déterminer d'une manière très-élémentaire. Si l'on veut éviter de calculer tous ces termes, on se bornera à en calculer quelques-uns, également espacés, et l'on construira une formule de sommation basée sur leurs valeurs numériques.

Prenons, par exemple, un intervalle de 15 ans; on calculera les termes α_1, α_{16}, α_{31}, et l'on pourra considérer le terme α_{46} comme égal à 0, ce qui donnera quatre valeurs numériques. On obtiendra, soit au moyen de la formule d'interpolation de Newton, soit plutôt par la formule de Lagrange, une fonction qui prenne ces quatre valeurs pour des valeurs de x égales à 0, 15, 30 et 45, et qui soit du 3ᵉ degré seulement : on en fera ensuite la sommation au moyen des formules connues.

Dans l'exemple proposé, on arrive ainsi, en employant la Table H^M, à trouver une prime unique égale à 6471 francs.

Si l'on veut calculer également la prime annuelle, supposée payable tant que les quatre personnes sont encore en vie, il faut chercher l'annuité sur les quatre têtes réunies, que l'on trouvera égale à 8,774; la prime annuelle ressort ainsi à

$$\frac{6471}{1 + 8,774} = 662^{\text{fr}}.$$

Assurance d'une rente de survie.

216. Cette assurance est un contrat par lequel la Compagnie s'engage, si une personne déterminée, que l'on appelle

l'*assuré*, vient à mourir avant une autre personne également déterminée, que l'on nomme le *bénéficiaire*, à servir au bénéficiaire une rente viagère, exigible à partir du décès et pendant toute la durée de sa vie.

Prime unique. — La Compagnie est dans la même position que si elle payait, dès à présent, une rente viagère au bénéficiaire, et si elle recevait en même temps une rente viagère reposant sur les deux têtes et s'éteignant au premier décès. La valeur de son engagement est donc égale à l'annuité sur la tête bénéficiaire, moins l'annuité sur les deux têtes réunies, c'est-à-dire qu'en désignant l'âge du bénéficiaire par b et l'âge de l'assuré par a, la prime unique, pour une rente de 1 franc, doit être fixée à

(134) $$P = X_b - X_{a,b}.$$

Exemple. — Chercher la prime unique de l'assurance d'une rente de survie de 1000 francs, sur une tête assurée de 20 ans, au profit d'une tête bénéficiaire de 60 ans.

Il faut faire $a = 20$ et $b = 60$,

$$P = X_{60} - X_{20,60} = 9,459 - 8,942 = 0,517,$$

soit une prime unique de 517 francs pour une rente de survie de 1000 francs.

Prime annuelle. — La prime annuelle est généralement payable jusqu'au premier décès; elle est alors égale à

$$\frac{P}{1 + X_{a,b}}.$$

Exemple. — Dans l'exemple précédent, la prime annuelle sera par conséquent

$$\frac{517}{1 + 8,942} = 52^{\text{fr}}.$$

Tarifs en usage. — Le tarif A applique exactement les primes calculées d'après la Table de Duvillard; le tarif B applique les mêmes primes, diminuées de 10 pour 100; enfin le tarif C applique les primes annuelles calculées d'a-

près la Table anglaise, avec un chargement de 10 pour 100 et de 20 centimes pour 100 francs. Quant aux primes uniques du tarif C, elles sont calculées en multipliant la prime annuelle chargée par l'annuité correspondante. Aussi le bénéfice sur l'un ou l'autre mode de payement est-il à très-peu près le même dans le tarif C; la différence vient de ce que le tarif a été calculé avec la Table H^{MF}, tandis que nous évaluons le bénéfice avec la Table H^{M}, qui est devenue d'un emploi beaucoup plus commode que tout autre, depuis que les *Actuaires anglais* ont publié, pour ce qui la concerne, de nombreuses Tables auxiliaires. Nous donnons ci-après un extrait de ces tarifs.

ASSURANCE DE SURVIE.

Primes uniques et annuelles assurant une rente de 1000 francs.

AGES		PRIME PURE		TARIF A.		TARIF B.		TARIF C.	
du bénéficiaire.	de l'assuré.	unique.	annuelle.	PRIME unique.	PRIMES annuelles.	PRIME unique.	RRIMES annuelles.	PRIME unique.	PRIMES annuelles.
20	20	2563	150	3307	234	2976	211	3217	190
20	30	3491	216	4089	306	3680	275	4184	260
20	35	4140	267	4571	355	4114	319	4796	310
20	40	4930	335	5167	421	4650	379	5655	385
20	45	5904	430	5902	511	5312	460	6665	485
20	50	7029	557	6781	636	6103	572	7896	625
20	60	9702	976	8888	1039	7999	935	10710	1070

Quand le bénéficiaire est plus âgé que l'assuré, les primes du tarif A et surtout celles du tarif B, principalement les primes uniques, deviennent bien vite inférieures aux primes pures, c'est-à-dire insuffisantes pour couvrir le risque. La raison en est que, plus l'âge du bénéficiaire dépasse l'âge de l'assuré, et plus l'opération dont il s'agit, qui est une assu-

rance de survie, s'approche d'être équivalente à une rente viagère ordinaire, c'est-à-dire à une assurance en cas de vie. Or, la Table de mortalité adoptée étant celle de Duvillard, qui donne une mortalité rapide, les primes auxquelles elle conduit doivent naturellement se trouver trop faibles. La même anomalie ne se retrouve pas dans le tarif C. Nous indiquons dans le tableau ci-après le bénéfice ou la perte moyenne d'une assurance de rente de survie.

ASSURANCE DE SURVIE

A PRIME UNIQUE OU A PRIMES ANNUELLES.

Bénéfice moyen d'une rente de survie de 1000 francs.

AGES		TARIF A.		TARIF B.		TARIF C.	
du bénéficiaire.	de l'assuré.	PRIME unique.	PRIMES annuelles.	PRIME unique.	PRIMES annuelles.	PRIME unique.	PRIMES annuelles.
20	20	744	1434	413	1034	654	682
20	30	598	1451	189	957	693	709
20	35	431	1364	— 26	814	656	666
20	40	237	1265	— 280	646	725	735
20	45	— 2	1117	— 592	415	761	760
20	50	—248	996	— 926	194	867	855
20	60	—814	618	—1703	—415	1008	936

Prime annuelle temporaire. — On peut encore stipuler que la prime ne sera payable que pendant n années au plus. Dans ce cas, elle sera déterminée par la formule

$$\frac{P}{1 + {}_{n-1}X_{a,b}}.$$

Primes annuelles remboursables. — Si l'on veut stipuler que les primes annuelles seront remboursées au décès de A, dans le cas où la tête B serait alors vivante, on verra, en rai-

sonnant comme au n° 211, que ces primes s'obtiendront au moyen de la formule (130), qui donne pour leur valeur

$$\frac{p}{1-\pi},$$

p étant la prime ordinaire de l'opération sans remboursement, et π la prime annuelle afférente au remboursement d'annuités de 1 franc, laquelle est donnée par la formule (122).

Assurance différée d'une rente de survie.

217. L'assurance de survie prend le nom d'*assurance différée,* lorsqu'il est stipulé que l'engagement de la Compagnie ne prendra naissance que si le décès de l'assuré, tout en précédant le décès du bénéficiaire, ne survient qu'après un délai déterminé (de n années).

Prime unique. — Par un raisonnement tout à fait analogue à celui du numéro précédent, on reconnaît que la prime unique de cette assurance a pour valeur

$$X_b^n - X_{a,b}^n.$$

Assurance temporaire d'une rente viagère de survie.

218. Si l'assurance d'une rente de survie est temporaire, elle n'a d'effet que dans le cas où le décès de l'assuré survient dans un délai déterminé (de n années); dans ce cas, la rente viagère dévolue au bénéficiaire lui est due pendant toute la durée de sa vie.

Prime unique. — La prime unique est égale à celle d'une assurance de survie faite immédiatement, moins celle d'une semblable assurance, faite dans n années si les deux têtes sont alors vivantes. Sa valeur est donc

$$(136) \qquad X_b - X_{a,b} - (X_{b+n} - X_{a+n,b+n})\, Q_{a,b}^n.$$

Exemple. — Un père âgé de 32 ans veut assurer à son fils,

âgé de 2 ans, une rente viagère de 1000 francs, qui ne lui sera acquise que si le décès du père survient avant que le fils ait atteint l'âge de 21 ans.

Il faut faire, dans la formule précédente, $b = 2$, $a = 32$, $n = 19$, ce qui donne

$$P = X_2 - X_{32,2} - (X_{21} - X_{51,21})Q^{19}_{32,2}$$
$$= 17,740 - 13,404 - (17,841 - 11,022)0,292 = 2,341.$$

La prime unique, pour une rente de 1000 francs, est donc 2341 francs. (Ce calcul est fait d'après la Table de Deparcieux.)

Assurance temporaire d'une rente temporaire de survie.

219. Cette opération est la même que celle qui précède, si ce n'est que, en cas de décès de la tête assurée pendant le délai fixée, la rente ne doit être payée au bénéficiaire que jusqu'à l'expiration dudit délai.

Prime unique. — La prime unique est alors égale à celle d'une assurance de survie immédiate, moins celle d'une assurance de survie différée, c'est-à-dire en combinant les formules (134) et (135), à

$$(137) \qquad X_b - X_{a,b} - (X^n_b - X^n_{a,b}).$$

On arrive au même résultat en remarquant que cette prime unique doit encore représenter la valeur d'une rente immédiate, mais temporaire, sur la tête assurée, moins la même rente pendant l'existence commune, ce qui donne

$$X_b - X^n_b - (X_{a,b} - X^n_{a,b}),$$

valeur égale à la précédente.

Exemple. — Un père, âgé de 32 ans, veut assurer à son fils, âgé de 2 ans, une rente temporaire de 1000 francs payable à partir du décès de lui, contractant, jusqu'à ce que l'enfant ait atteint l'âge de 21 ans.

On obtient la prime unique en faisant, dans la formule précédente, $b = 2$, $a = 32$, $n = 19$, ce qui donne

$$P = X_2 - X_{32,2} - (X_2^{19} - X_{32,2}^{19})$$
$$= 17{,}740 - 13{,}404 - (6{,}544 - 3{,}215) = 1{,}007.$$

Quant à la prime annuelle, si l'on veut qu'elle ne soit payable que du vivant du père et de l'enfant, et pendant 16 années seulement, on la calculera par la formule

$$\frac{1007}{1 + {}_{15}X_{32,2}} = \frac{1007}{9{,}89} = 102^{fr}.$$

Cette combinaison n'a été mise en pratique, en France, que par une seule Compagnie, sous le nom d'assurance de *rente d'éducation*, mais son emploi ne s'est pas répandu. Les primes du tarif ont été calculées comme pour le capital de dotation (n° 213).

Assurance d'une rente de survie sur trois têtes.

220. Quand il y a trois têtes en jeu, les assurances de rentes de survie présentent de nombreuses combinaisons, dont la solution s'obtient très-simplement au moyen des annuités sur une, deux et trois têtes. Nous allons passer en revue les principales. Nous supposerons, dans les exemples, qu'il s'agisse d'une rente de 1 franc, et que les âges a, b, c soient égaux à 20, 30 et 40 ans.

Premier cas. — *Rente payable au décès de la tête* C, *au profit de* A *et* B, *tant qu'ils existeront simultanément.* — La Compagnie est dans la même position que si elle payait dès à présent une annuité ou rente viagère sur les deux têtes A et B, et si elle recevait une annuité sur les trois têtes réunies; par conséquent

$$P = X_{a,b} - X_{a,b,c}.$$

Nous pouvons ici faire une application numérique, parce qu'il n'entre dans la formule qu'une annuité sur deux têtes.

Le résultat présentera donc une exactitude raisonnable. Avec les données ci-dessus indiquées, ce résultat ressort à

$$15,1533 - 12,36 = 2^{fr},79.$$

La prime annuelle payable jusqu'au premier décès sera

$$\frac{P}{1 + X_{a,b,c}} = \frac{2,79}{1 + 12,36} = 0^{fr},21.$$

Deuxième cas. — *Rente payable après le décès de* B *et de* C, *au profit de* A. — La Compagnie est dans la même position que si elle payait dès à présent une rente sur la tête A, plus une rente au premier des trois décès : elle recevrait une rente au premier décès de A et de B, plus une rente au premier décès de A et de C. La prime unique est donc

$$P = X_a + X_{a,b,c} - X_{a,b} - X_{a,c},$$

ou, numériquement,

$$P = 31 - 28,86 = 2.14.$$

La prime annuelle doit être payable si A meurt le premier ou le second, jusqu'à son décès, et dans le cas contraire, jusqu'au dernier décès de A et de B.

Troisième cas. — *Rente payable, à partir du décès de* C, *et jusqu'au dernier décès de* A *et de* B. — Cette opération peut être remplacée par trois autres : 1° celle du premier cas; 2° celle du deuxième cas au profit de A; 3° celle du deuxième cas au profit de B. La prime unique ressort par conséquent à

$$P = X_a + X_b - X_{a,b} - X_{a,c} - X_{b,c} + X_{a,b,c},$$

ou, numériquement, à

$$P = 48,13 - 42,10 = 6,03.$$

La prime annuelle doit être payable jusqu'au décès de C si ce décès arrive le premier, et, dans le cas contraire, jusqu'au second décès.

Quatrième cas. — *Rente payable au décès de l'une quelconque des trois têtes, au profit des deux autres, tant qu'elles existeront simultanément.* — Cette opération n'est autre que celle du premier cas, répétée à la fois pour les trois têtes. La prime est donc

$$P = X_{a,b} + X_{a,c} + X_{b,c} - 3 X_{a,b,c},$$
$$P = 42,10 - 37,08 = 5,02.$$

La prime annuelle doit être payable jusqu'au premier décès ; elle sera par conséquent fixée à

$$\frac{P}{1 + X_{a,b,c}} = \frac{5,08}{1 + 12,36} = 0,38.$$

Cinquième cas. — *Rente payable au décès de l'une quelconque des deux têtes, au profit des deux survivants et jusqu'à leur dernier décès.* — C'est l'opération du troisième cas, répétée à la fois pour les trois têtes. On a par conséquent

$$P = 2(X_a + X_b + X_c) - 3(X_{a,b} + X_{a,c} + X_{b,c}) + 3 X_{a,b,c},$$

soit, numériquement, $P = 138,88 - 126,30 = 12,58$.

La prime annuelle doit être payable jusqu'au premier décès; elle sera par conséquent

$$\frac{P}{1 + X_{a,b,c}} = \frac{12,58}{1 + 12,36} = 0,94.$$

Sixième cas. — *Rente payable après le second décès, quel qu'il soit, au profit du dernier survivant.* — C'est l'opération du deuxième cas, répétée à la fois pour les trois têtes. On a par conséquent

$$P = X_a + X_b + X_e - 2(X_{a,b} + X_{a,c} + X_{b,c}) + 3 X_{a,b,c},$$

soit, numériquement, $P = 87,98 - 84,20 = 3,78$.

La prime annuelle doit être payable jusqu'au second décès, quel qu'il soit.

Voici, comme application des formules précédentes, quel-

ques problèmes, dont les deux premiers sont extraits de l'ouvrage déjà cité de M. Maas.

221. *Premier problème.* — Trois personnes, A, B, C, veulent constituer sur leurs trois têtes une rente viagère de 1000 francs payable jusqu'au dernier décès, et devant toujours se partager également entre les vivants. On demande pour quelle somme chacune d'elles doit contribuer au payement du capital constitutif de cette rente.

Si nous décomposons cette opération, nous y trouvons au profit de la personne A :

1° Une rente de $\frac{1}{3}$ tant que les trois têtes existeront ensemble; sa valeur est $\frac{1}{3}X_{a,b,c}$;

2° Une rente de $\frac{1}{2}$, payable après le premier décès, tant que A existera conjointement avec B ou avec C; sa valeur (premier cas du numéro précédent) est $\frac{1}{2}(X_{a,b}+X_{a,c}-2X_{a,b,c})$;

3° Une rente de 1, après le décès de B et de C; sa valeur (deuxième cas du numéro précédent) est

$$X_a+X_{a,b,c}-X_{a,b}-X_{a,c}.$$

La partie contributive de A devra donc être égale à la somme de ces trois valeurs, qui, en simplifiant, se réduit à

$$X_a-\tfrac{1}{2}(X_{a,b}+X_{a,c})+\tfrac{1}{3}X_{a,b,c}.$$

Les parts contributives des deux autres personnes s'établissent de la même manière, et leur somme donne bien pour le prix total de la rente à constituer

$$X_a+X_c+X_b-X_{a,b}-X_{a,c}-X_{b,c}+X_{a,b,c},$$

conformément au résultat obtenu dans le troisième cas du numéro précédent.

Si les âges a, b, c sont égaux à 50, 60 et 70 ans, le prix total de la rente à constituer est de 14340 francs et les parts contributives de chacun sont 7320 francs, 4520 francs et 2500 francs.

222. *Deuxième problème.* — Trois personnes, A, B et C, veulent constituer sur leurs trois têtes une rente viagère payable jusqu'à leur dernier décès. A et B en jouiront par moitié pendant leur existence commune : si c'est B qui meurt le premier des deux, la rente appartiendra à A tout entière; si c'est A qui meurt le premier, la rente appartiendra par moitié à B et à C pendant leur existence commune ; enfin, dans tous les cas, le dernier survivant jouira de la totalité de la rente.

Cette combinaison peut se décomposer de la manière suivante :

Elle assure au profit de A une rente de $\frac{1}{2}$ sur sa tête jointe à la tête B, soit $\frac{1}{2}X_{a,b}$, plus une rente de 1 s'il survit à B, soit $X_a - X_{a,b}$: en tout $X_a - \frac{1}{2}X_{a,b}$.

Elle assure au profit de B une rente $\frac{1}{2}X_{a,b}$, plus une rente de $\frac{1}{2}$ en cas de prédécès de A, soit $\frac{1}{2}(X_{a,b} - X_{a,b,c})$, plus une rente de 1 après le décès de A et de C, soit

$$X_b - X_{a,b} - X_{a,c} + X_{a,b,c};$$

en tout $X_b - \frac{1}{2}(X_{a,b} + X_{b,c} - X_{a,b,c})$.

Enfin elle assure au profit de C une rente de $\frac{1}{2}$ en cas de prédécès de A, soit $\frac{1}{2}(X_{b,c} - X_{a,b,c})$, plus une rente de 1 après le décès de A et de B, soit $X_c - X_{a,c} - X_{b,c} + X_{a,b,c}$; en tout $X_c - X_{a,c} - \frac{1}{2}(X_{b,c} - X_{a,b,c})$.

En additionnant les trois parts contributives, on retrouve bien le prix d'une rente payable sur les trois têtes jusqu'au dernier décès.

Si les âges *a, b, c* sont égaux, comme dans le problème précédent, à 50, 60 et 70 ans, le prix total de la rente à constituer est encore 14340 francs, et les parts contributives de chacun ressortent à 8580 francs, 5295 francs et 465 francs.

223. *Troisième problème.* — Trois personnes, A, B, C, âgées de 20, 30 et 40 ans, s'assurent mutuellement une rente de survie de 1000 francs, payable à partir du décès de la plus âgée au profit des deux autres, jusqu'à leur dernier décès. Les primes doivent être payées par A et B, et calculées en

proportion de l'avantage que chacun d'eux retire de cette assurance. De plus, A doit se libérer au moyen d'une prime unique, et B ne veut verser que des primes annuelles, exigibles pendant dix ans au plus, et cessant d'être dues soit à son propre décès, soit au décès de C.

Il faut d'abord calculer quelle est la portion de la prime unique dont le payement incombe à chacune des deux personnes A et B. A obtiendrait le même résultat pour ce qui le concerne, en assurant une rente payable au décès de C au profit de A et B, tant qu'ils existeront simultanément, plus une rente payable après le décès de B et de C, et à son propre profit. Ce sont les deux opérations analysées dans le premier et le deuxième cas. La prime unique qu'il aurait à payer serait alors $2{,}79 + 2{,}14 = 4{,}93$. De son côté B pourrait faire la même chose pour ce qui le concerne, et il aurait à payer $2{,}79 + 1.11 = 3{,}90$; par conséquent A et B doivent contribuer au payement de la prime unique de l'opération dans la proportion de 493 à 390. Cette prime unique est 6030 francs; il en résulte que A devrait payer 3367 francs et B 2663 francs.

A, devant se libérer au moyen d'une prime unique, n'aura qu'à verser la somme de 3367 francs; mais, pour ce qui concerne B, il faut transformer la prime unique qui lui incombe en une prime annuelle temporaire, reposant sur deux têtes. Cette transformation se fait d'après la formule (107), d'après laquelle la prime annuelle doit être fixée à

$$\frac{2663}{1 + {}_9X_{30,40}} = 338^{\text{fr}}.$$

224. *Quatrième problème.* — Trois personnes, A, B, C, âgées de 20, 30 et 40 ans, veulent constituer une rente de 10000 francs payable à partir du premier décès aux deux survivants, jusqu'au dernier décès de ceux-ci. L'assuré A veut payer une prime unique; l'assuré B une prime annuelle, exigible sur sa tête, mais seulement jusqu'au premier des trois décès; enfin l'assuré C veut payer une prime annuelle exigible jusqu'au premier décès de A et de lui-même, en

stipulant en outre qu'elle ne sera exigible au plus que pendant 20 années. On demande de fixer les primes que chaque assuré doit payer, en proportion de la valeur que le contrat d'assurance présente pour lui.

Prime unique. — La prime unique a été calculée dans l'un des exemples précédents (n° 220, cinquième cas); elle est de $0^{fr},94$ pour 1 franc de rente, soit 9400 francs pour la rente de 10000 francs dont il s'agit ici.

Pour partager le payement de cette prime unique entre les trois coassurés, il faut raisonner comme il suit :

L'assuré A arriverait au même résultat pour ce qui le concerne en faisant les trois opérations suivantes : 1° s'assurant une rente payable à partir du décès de B, jusqu'au dernier survivant de C et de lui-même; 2° s'assurant une rente payable à partir du décès de C, jusqu'au dernier survivant de B et de lui-même; 3° s'engageant à payer après le décès de B et de C une rente jusqu'à son propre décès. La prime unique totale qu'il aurait à payer ressortirait ainsi, d'après les formules données ci-dessus pour les troisième et deuxième cas, à :

$$X_a + X_b + X_c - X_{ab} - X_{ac} - 2\,X_{bc} + X_{abc},$$

ce qui revient, tous calculs faits, à

$$21,17 - X_{b,c} = 7,94.$$

De même l'assuré B arriverait au même résultat, pour ce qui le concerne, en faisant trois opérations, dont la prime unique ressort à

$$21,17 - X_{ac} = 7,46.$$

Et l'assuré C arriverait au même résultat, pour ce qui le concerne, en payant

$$21,17 - X_{a,b} = 6,02.$$

Par conséquent, si tous les assurés payaient une prime unique, ils devraient contribuer au payement de la prime unique totale de 9400 francs dans la proportion des membres

ci-dessus, c'est-à-dire que

A devrait payer	....	3490 fr.
B »	....	3270
C »	....	2640

L'assuré A, voulant payer sa quote-part sous forme de prime unique, aura donc effectivement 3490 francs à verser. L'assuré B, désirant acquitter une prime annuelle exigible jusqu'au premier des trois décès, aura à payer annuellement, d'après la formule (109),

$$\frac{3270^{\text{fr}}}{1 + X_{20,30,40}} = \frac{3270}{13,36} = 245^{\text{fr}}.$$

Enfin, l'assuré C, voulant acquitter une prime annuelle temporaire de 20 ans, et reposant sur les têtes A et C, devra payer annuellement, d'après la formule (107),

$$\frac{2640}{1 + {}_{19}X_{20,40}} = 215^{\text{fr}}.$$

Prêts viagers.

225. On nomme *prêt viager* un contrat par lequel la Compagnie prête à un particulier un capital qui devra lui être remboursé par une série de primes reposant sur sa tête.

Le prêt viager n'est autre chose qu'une assurance, dans laquelle la Compagnie paye d'avance le capital qu'elle ne devrait payer qu'au terme de l'assurance, c'est-à-dire soit au décès de l'assuré, soit à une époque déterminée : aussi le prêt viager peut, au moins théoriquement parlant, s'adapter à toutes les combinaisons d'assurances en cas de décès; il admet également tous les modes de payement des primes. La prime annuelle totale, ou annuité, que l'emprunteur doit payer, se compose : 1° de la prime ordinaire d'assurance, calculée suivant la combinaison d'assurance choisie et suivant le mode adopté pour le payement de cette prime; 2° de l'intérêt annuel afférent au capital que la Compagnie a versé

d'avance, tandis qu'elle n'aurait eu à le verser que plus tard si elle n'avait fait que l'opération d'assurance seule.

Il faut remarquer que, pour ce taux d'intérêt, on ne pourra pas adopter le taux qui est employé pour le calcul des primes. Nous avons dit, en effet (nº 104), que ce dernier taux était choisi toujours au-dessous du taux d'intérêt résultant de la situation actuelle du marché financier, et nous en avons donné la raison. Cette raison ne subsiste plus ici, et l'on devra adopter un taux d'intérêt au moins égal au taux actuel du marché financier. D'ailleurs, le taux d'intérêt, à un moment donné, n'est jamais un chiffre fixe : il comprend bien un élément qui est à peu près fixe, le loyer du capital, mais il comprend également la compensation du risque couru et des difficultés de recouvrement, éléments qui varient, pour chaque prêt, avec la nature des garanties offertes. On aura nécessairement égard à ces considérations, quand on aura à fixer le taux d'intérêt afférent à un prêt viager.

Une fois ce taux déterminé, la fixation de la prime ou annuité à payer par l'emprunteur se réduira à une question d'assurance ordinaire.

Si l'emprunteur veut payer une prime constante pendant toute sa vie et n'avoir jamais le capital à rembourser, sa prime sera égale à la prime d'assurance pour la vie entière, plus le taux d'intérêt. S'il ne veut payer de prime que pendant 20 ans au plus, et n'avoir rien à rembourser après ce délai, sa prime sera égale à celle d'une assurance mixte, plus le taux d'intérêt. S'il veut payer une prime pendant 5 ans, et rembourser ensuite, s'il est vivant, le capital emprunté, sa prime sera celle de l'assurance temporaire de 5 ans, plus le taux d'intérêt. S'il ne veut payer sa prime que jusqu'au premier décès de lui-même et d'une autre personne, en se trouvant libéré si c'est l'autre personne qui meurt la première, et en restant débiteur sur sa succession si c'est lui-même qui meurt le premier, sa prime sera égale à celle d'une assurance de survie sur la tête du tiers, lui-même étant bénéficiaire, plus le taux d'intérêt.

En pratique, le prêt viager, par sa nature même, ne peut pas se contracter à prime unique, mais seulement à primes annuelles.

Exemple. — On demande à emprunter un capital de 100 000 francs; on ne veut payer de prime que pendant 20 ans, et l'on demande quel sera le taux de cette prime, suivant que l'on s'engagera ou non à rembourser au bout des 20 ans le capital emprunté. On suppose l'emprunteur âgé de 30 ans, et le taux d'intérêt fixé à 5 pour 100.

Si l'on veut ne rien avoir à rembourser au bout des 20 années, la prime doit être égale à celle d'une assurance mixte, plus 5 pour 100, c'est-à-dire à 8,660 pour 100; elle sera donc de 8660 francs par an.

Si l'on veut, au bout du délai des 20 ans, rembourser le capital emprunté, la prime sera égale à celle d'une assurance temporaire de 20 ans de durée, plus 5 pour 100, c'est-à-dire à 5,96 pour 100; elle sera donc de 5960 francs par an.

DEUXIÈME CLASSE.

Assurances en cas de vie.

226. Pour calculer les primes des assurances en cas de vie, il faut adopter une Table de mortalité qui représente aussi exactement que possible la mortalité des personnes à assurer. Ces personnes ne sont soumises à aucun examen, et les Compagnies peuvent accepter toutes celles qui se présentent, puisque l'augmentation des chances de décès ne peut qu'atténuer la valeur de l'engagement pris par la Compagnie; mais cet examen médical, que les Compagnies ne font pas, est certainement fait, d'une manière plus probante encore, par les contractants eux-mêmes, en ce sens qu'on ne se décide à contracter une assurance en cas de vie que quand on a des raisons de penser que l'on n'est soumis à aucune chance exceptionnelle de décès, ni en raison de sa santé, ni en raison de la nature des occupations ou des voyages auxquels on est assu-

jetti. La classe des assurés en cas de vie doit donc être soumise à une mortalité moins grande que la population générale, et même que la classe des assurés en cas de décès.

Les Tables dressées sur des groupes de population, dont il est question dans le Chapitre VI, ne sont pas plus employées pour les assurances en cas de vie que pour les assurances en cas de décès, et l'on n'applique que les Tables de mortalité dressées sur des têtes choisies.

Quand les premières Compagnies d'assurances françaises se sont fondées, la Table de Deparcieux était la seule qui représentât la mortalité de têtes choisies pour leur bon état de santé ; elle avait, en effet, été dressée d'après des renseignements provenant des registres d'associations tontinières, lesquelles constituaient de véritables assurances en cas de vie. Les Compagnies prirent donc pour base la Table de mortalité de Deparcieux, complétée pour les premières années de la vie par la Table hollandaise de Kerseboom. Nous reproduisons à la fin du volume les Tables qui ont servi pour ces calculs, et qui contiennent, outre le nombre des vivants à chaque âge d'après Deparcieux, les nombres T et G, ainsi que les annuités viagères.

Ces nombres T et G jouent le même rôle que les nombres D et N de la Table de commutation anglaise, pour le calcul des annuités. Ils sont liés par les relations ci-après, dans lesquelles ω représente l'âge extrême inscrit dans la Table (94 ans) et a l'âge courant (*) :

(138) $$T_a = f_{(a)}(1+t)^{\omega-a},$$

(139) $$G_a = T_a + T_{a+1} + T_{a+2} + \ldots,$$

(140) $$X_a = \frac{G_{a+1}}{T_a},$$

(*) Ces nombres G sont ceux que M. Maas a désignés dans son Traité par la lettre S : nous avons dû faire ce changement de lettre pour éviter toute confusion avec les nombres S employés dans la Table de commutation des Actuaires anglais (n° 146).

(141) $$Q_a^n = \frac{T_{a+n}}{T_a},$$

(142) $$X_a^n = \frac{G_{a+n+1}}{T_a},$$

(143) $${}_nX_a = \frac{G_{a+1} - G_{a+n+1}}{T_a} \ldots .$$

Pour l'intérêt auquel on admet que les sommes reçues pourront être placées, les Compagnies françaises ont admis, dans les assurances en cas de vie comme dans les assurances en cas de décès, le taux de 4 pour 100. Le chiffre de base a cependant été remplacé par celui de 4 ½ pour 100, pour ce qui concerne les rentes viagères, à certaines époques, en 1848 et en 1871, parce que le cours peu élevé des fonds publics permettait alors de faire des placements à un taux plus rémunérateur qu'en temps ordinaire. Cette raison n'est pas très-bonne, pour deux motifs. D'abord l'adoption d'un certain taux d'intérêt plus élevé que le taux ordinaire pour la confection d'un tarif suppose non-seulement qu'on peut trouver des placements favorables au moment où l'opération d'assurance se conclut, mais encore qu'on pourra le faire pendant toute la durée de cette assurance, c'est-à-dire pendant une vingtaine d'années et quelquefois plus : la baisse momentanée des fonds publics n'est donc pas une raison suffisante pour élever le taux qui doit servir de base d'une manière permanente pendant toute cette période. De plus, il ne faut pas oublier que, soit qu'il s'agisse de fonds publics ou de tout autre placement, la baisse des cours est toujours la représentation d'une diminution de solidité dans la garantie offerte par le débiteur. Les Compagnies qui ont des fonds à placer, et qui se trouvent en face d'une baisse de fonds publics, doivent donc considérer l'augmentation d'intérêt qui en résulte à leur profit comme une rémunération pour la diminution de garantie qui leur est offerte, et non comme une augmentation réelle du loyer du capital.

Ces considérations ne sont pas admises en France par le public. A cause des prescriptions que contiennent les statuts des Compagnies au sujet des modes autorisés de placement de fonds, on regarde, et avec une certaine raison, la stabilité des Compagnies elles-mêmes comme intimement liée à la stabilité financière de l'État ; on considère cette dernière comme absolue pour ainsi dire, et l'on se figure, par conséquent, qu'aucune Compagnie financière ne présente une garantie aussi solide que l'État. Il en résulte que, dans les moments où le cours peu élevé des fonds public permet de faire des placements sur l'État à plus de 5 pour 100 ou 5 $\frac{1}{2}$ pour 100 par an, les Compagnies ne recevraient plus guère de propositions de rentes viagères si elles n'adoptaient pas un tarif plus avantageux qu'en temps ordinaire. La pratique n'a pas indiqué que le même inconvénient fût à redouter pour les assurances de capitaux payables en cas de vie ; il en est résulté qu'on a toujours conservé pour ces assurances, ainsi que pour les rentes viagères différées, les mêmes tarifs, qui sont calculés sur le taux de 4 pour 100, tandis que pour les rentes viagères immédiates il y a deux tarifs, l'un calculé à 4 pour 100, qui est le tarif normal, l'autre calculé à 4 $\frac{1}{2}$ pour 100, que l'on a appliqué dans le moment où la rente française 5 pour 100 s'est tenue au-dessous du cours de 95 à 100 francs, mais pour revenir le plus tôt possible au tarif normal.

Les primes, une fois calculées au moyen de la Table de mortalité de Deparcieux et du taux de 4 pour 100, ont été conservées telles quelles et sans aucun changement pour former les tarifs, au moins en ce qui concerne les assurances de capitaux différés. Pour les rentes viagères, les chiffres des primes pures ainsi obtenus ont été augmentés, mais seulement pour les âges les plus avancés. Toutes les Compagnies françaises qui se sont successivement fondées ont adopté les mêmes tarifs pour les assurances de capitaux différés : il y a, au contraire, quelques divergences dans les tarifs appliqués pour les rentes viagères.

En Angleterre, les Compagnies d'assurances ne font pour ainsi dire pas d'assurances en cas de vie, au moins d'une manière suivie, et c'est à peine si elles ont à leur sujet des tarifs généraux. Les rentes viagères immédiates sont constituées par une caisse spéciale, gérée par l'État; et, quant aux rentes viagères différées et aux capitaux payables en cas de vie, ce sont des opérations qui ne sont pas entrées dans le courant de la pratique.

Assurance d'un capital différé.

227. L'assurance d'un capital différé est un contrat par lequel la Compagnie s'engage à payer un capital à une époque fixée, à la condition qu'une personne déterminée A existera encore à cette époque.

Prime unique. — La prime unique ou la valeur actuelle de cet engagement n'est autre que la quantité que nous avons désignée au n° 143 par Q_a^n, en représentant par a l'âge du contractant, et par n le nombre d'années restant à courir jusqu'à l'époque fixée pour le payement. Sa valeur est

$$Q = \frac{f(a+n)}{(fa)} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{T_{a+n}}{T_a}.$$

Ainsi que nous l'avons vu, les assurances en cas de vie sont peu avantageuses dans l'âge adulte; d'un autre côté, les assurances de capitaux différés ne répondent à aucun besoin pendant la vieillesse : aussi ne sont-elles appliquées que pour les enfants. Elles ont généralement pour but de garantir un capital, payable à un enfant vers l'époque où il atteindra sa majorité.

Exemple. — Calculer la prime unique nécessaire pour assurer un capital de 10000 francs, payable dans 20 ans à un enfant âgé aujourd'hui d'un an, s'il existe encore à cette époque.

Il faut, dans la formule ci-dessus, faire $a = 1$ et $n = 20$, ce qui donne

$$Q_1^{20} = \frac{f(21)}{f(1)} \frac{1}{1,04^{20}} = \frac{T_{21}}{T_1} = \frac{14118}{41911} = 0,3369,$$

soit une prime unique de 3369 francs pour un capital de 10000 francs.

Primes annuelles. — On ne fait presque jamais cette opération à prime unique, et l'on substitue à celle-ci des primes annuelles. Le capital cessant d'être exigible si la tête A vient à décéder, il faut nécessairement que les primes annuelles cessent également de l'être dans ce cas; et par conséquent elles devront reposer ou sur la seule tête A, ou sur deux têtes, dont l'une sera la tête A.

Si les primes ne reposent que sur la tête A, leur valeur sera déterminée par la formule (97)

$$p = \frac{Q_a^n}{1 + {}_{n-1}X_a} = \frac{T_{a+n}}{G_a - G_{a+n}};$$

soit, dans l'exemple choisi,

$$p = \frac{T_{21}}{G_1 - G_{21}} = 0{,}0284,$$

c'est-à-dire 284 francs de prime annuelle pour un capital de 10000 francs.

Tarifs en usage. — Les Compagnies françaises appliquent les primes résultant de ces calculs, sans aucune augmentation pour frais et bénéfices. La raison en est que les assurances de capitaux en cas de vie offrent déjà très-peu d'avantages aux contractants (*voir* plus haut, n° 192); si l'on avait voulu en augmenter les primes, on les aurait rendues impraticables. Mais, d'un autre côté, il en résulte que les Compagnies n'y trouvent aucun bénéfice, car la mortalité de la classe qui peut y avoir recours est peut-être moindre encore que ne l'indique la Table de Deparcieux; tout au plus les Compagnies trouvent-elles une compensation dans les *bénéfices de placement* qu'elles peuvent réaliser en plaçant les primes versées à un taux un peu supérieur à 4 pour 100; mais, en somme, ces affaires ne sont avantageuses ni pour les contractants ni pour les Compagnies.

Cependant, loin d'augmenter les primes résultant du calcul,

quelques Compagnies procèdent même par voie de diminution éventuelle, en allouant aux assurés, à titre de participation, la moitié des bénéfices réalisés sur cette catégorie d'affaires.

Nous donnons ci-après un extrait du tarif en vigueur, qui est le même dans toutes les Compagnies françaises; quant au bénéfice moyen d'une assurance déterminée, on peut le considérer comme nul.

ASSURANCE DE CAPITAUX DIFFÉRÉS.

Primes uniques et annuelles assurant un capital de 10 000 francs, payable à l'âge de 21 ans.

AGE du contractant.	PRIME UNIQUE.	PRIME ANNUELLE.
Naissance.	2603^fr	256^fr
1 an.	3369	284
2	3668	310
3	3979	339
4	4266	370
5	4539	405
10	5950	676

Primes annuelles reposant sur deux têtes. — Si les primes annuelles cessent d'être exigibles au premier décès de deux têtes A et B, leur valeur se déterminera par la formule (107)

$$p = \frac{Q_a^n}{1 + {}_{n-1}X_{a,b}}.$$

Ainsi, dans l'exemple choisi, si l'on veut que les primes cessent d'être payables soit au décès de l'enfant contractant, qui est âgé de 1 an, soit au décès de son père, âgé de 30 ans, la valeur de la prime sera

$$p = \frac{3369}{1 + {}_{19}X_{30,1}} = \frac{3369}{1 + 9.90} = 309^{\text{fr}}.$$

Ce mode de payement n'a jamais été mis en pratique pour les assurances de capitaux différés. Il serait cependant beaucoup plus logique que le mode de payement ordinairement adopté : les primes étant destinées à constituer au profit d'un enfant un capital provenant des économies de son père, il est naturel que ces primes cessent d'être exigibles si le père vient à décéder, ce qui donne alors à l'opération le caractère d'une assurance en cas de décès. La prime annuelle de 309 francs à laquelle on arrive dans cet exemple n'est supérieure que de 25 francs ou 9 pour 100 à la prime ordinaire du capital différé, exigible pendant 20 ans sans condition ; il est vrai que, si l'on mettait cette combinaison en pratique, il faudrait considérer ce chiffre de 309 francs comme le montant de la prime pure, et y ajouter un chargement. Cette opération se rapprocherait d'ailleurs beaucoup d'une assurance à terme fixe, contractée sur la tête du père, combinaison dont la prime annuelle serait, dans l'exemple ci-dessus, de 347 francs (*voir* n° 210).

228. *Contre-assurance.* — On ajoute souvent au contrat de capital différé une clause de contre-assurance, par laquelle la Compagnie s'engage, si le contractant vient à décéder avant le délai fixé, à rembourser toutes les primes versées jusqu'à son décès. Cette opération exige une nouvelle prime, qui n'est pas comprise dans le remboursement.

La prime unique de l'opération de contre-assurance est donnée par les formules indiquées au n° 207. En pratique, on remplace ce payement de prime unique par une prime annuelle, qui est payée pendant un nombre d'années égal ou inférieur à la durée de l'opération principale, et qu'on choisit souvent de cinq années seulement. Comme la contre-assurance est une véritable assurance en cas de décès, il faut, dans les applications des formules du n° 207, se servir non de la Table de Deparcieux, mais de la Table H^M ou de la Table de Duvillard. Cette dernière est la seule que l'on puisse appliquer quand il s'agit d'un enfant de moins de 10 ans, puisque

la Table anglaise ne commence qu'à 10 ans. Aucun examen médical n'est demandé pour cette opération, parce que le décès n'entraîne pas de perte pour la Compagnie.

Exemple. — On doit verser, pour assurer à un enfant d'un an un capital de 10000 francs payable à sa majorité, une prime annuelle de 284 francs pendant 20 ans (conformément à l'exemple qui précède). On demande quelle est la prime unique ou la prime annuelle à payer pour effectuer la contre-assurance de tous ces versements, autrement dit pour que la Compagnie rembourse tous les versements de 284 francs qui auront été effectués, si le décès de l'enfant survient avant l'époque fixée.

Il faut, dans les formules du nº 207, faire $a = 1$ et $n = 20$, ce qui donne pour la prime unique $1^{fr},242$. Cette prime unique se rapporte à des versements de 1 franc; les versements étant dans cet exemple de 284 francs, la prime unique s'élèvera à 353 francs.

Quant à la prime annuelle, si l'on décide, comme on le fait souvent, qu'elle ne sera payable que pendant 5 années, elle devra être fixée à

$$\frac{353^{fr}}{1 + {}_4X_1} = 89^{fr},60.$$

Tarifs en usage. — Les Compagnies appliquent généralement pour la contre-assurance les primes telles qu'elles résultent du calcul fait avec la Table de Duvillard. Comme ces opérations portent toujours sur des sommes peu élevées, on ne s'est pas astreint à ce sujet à une grande uniformité; ainsi certaines Compagnies adoptent cette règle plus simple, qu'il suffit, pour obtenir la contre-assurance, de verser une prime additionnelle égale à 15 pour 100 de la valeur de la prime principale, relative à l'assurance du capital différé. Cette prime additionnelle est alors exigible pendant toute la durée de l'opération.

Primes remboursables en cas de décès. — Si l'on désire qu'en cas de décès du contractant la Compagnie rembourse intégra-

lement toutes les sommes qu'elle aura reçues, il ne suffit pas de faire une contre-assurance, puisque alors les primes de cette opération elle-même ne seraient pas remboursées; mais il faut réduire toute l'opération à une seule et en calculer la prime annuelle comme il a été dit à la fin du n° 207.

Tarifs en usage. — Quelques Compagnies contractent des assurances de capitaux différés pour les enfants, avec primes annuelles remboursables en entier. Afin d'éviter la complication d'un nouveau tarif, elles ont adopté pour règle d'ajouter à la prime annuelle du capital différé 50 centimes par 100 francs de capital assuré. Quand les enfants sont jeunes, ces primes sont plus élevées que celles qui résultent de la formule du n° 207; elles sont moins élevées dans le cas contraire.

Prime unique, remboursable en cas de décès. — Si l'on voulait assurer un capital différé en versant une prime unique qui serait remboursée de suite, en cas de décès du contractant, on décomposerait l'opération en deux. En appelant x la prime unique cherchée, cette prime devrait contenir : 1° la prime unique du capital différé qui est Q_a^n, 2° la prime unique de l'assurance temporaire de la somme x elle-même pendant n années, qui est $x\frac{M_a - M_{a+n}}{D_a}$. On devrait donc avoir

$$x = Q_a^n + x\,\frac{M_a - M_{a+n}}{D_a},$$

d'où

(144) $$x = \frac{D_{a+n}}{D_a - M_a + M_{a+n}}.$$

Exemple. — On veut assurer à un enfant, âgé de 15 ans, un capital de 10000 francs payable à 40 ans, en versant une prime unique, qui serait remboursée au décès de cet assuré, si ce décès survenait avant cet âge de 40 ans.

Il faut, dans la formule précédente, faire $a = 15$ et $n = 25$. En appliquant la Table de commutation anglaise, on trouve

pour la valeur de la prime

$$\frac{17139}{56540 - 11712 + 6503} = 0^{fr},347,$$

soit 3470 francs pour 10000 francs.

Mais une semblable opération, comme du reste toutes celles qui se font avec contre-assurance, perdrait à la fois les caractères de l'assurance en cas de décès et ceux de l'assurance en cas de vie, et ne serait plus qu'un placement de fonds, fait dans des conditions telles que tout particulier en réaliserait facilement par lui-même d'aussi avantageuses.

RENTES VIAGÈRES.

On appelle *rente* (première partie, n° 9) une série de sommes payables à des échéances équidistantes entre elles, et *rente viagère* une rente dont les termes ne sont exigibles que pendant la vie d'une ou plusieurs personnes déterminées. Sauf désignation contraire, on suppose toujours que les termes de la rente, c'est-à-dire les sommes à payer à chaque échéance, sont de valeur constante. Une rente viagère est dite *immédiate* quand le rentier entre en jouissance immédiatement, c'est-à-dire quand il doit recevoir le premier terme après un intervalle égal à l'intervalle qui sépare deux échéances consécutives; cette condition est toujours supposée, à moins de désignation contraire. Lorsque le premier terme de la rente ne doit être payé qu'après un délai plus long, la rente est dite *différée* d'une durée égale à la différence qui existe entre ce délai et l'intervalle de deux échéances ordinaires. Une rente viagère peut être payable par années ou par fractions d'années; mais on la définit toujours par le montant cumulé de tous les arrérages d'une année : ainsi une rente de 1000 francs tous les trois mois s'appellera une rente de 4000 francs payable par trimestres.

Rentes viagères immédiates.

229. Une rente viagère immédiate n'est autre chose qu'une annuité viagère, si ce n'est que, dans la rente viagère, le rentier a droit, d'après la loi (Code civil, art. 1980), et à moins de stipulation contraire, aux arrérages courus depuis la dernière échéance jusqu'au jour de son décès. Lorsque la rente est payable par années, le montant de ces arrérages est en moyenne de 6 mois, soit 0fr,50 pour une rente de 1 franc. Si a représente l'âge du rentier au moment où il contracte, la valeur de cette somme, payable à son décès, est, d'après la formule (80), $\frac{1}{2}(1 - tX_a)$; la valeur totale d'une rente viagère payable par années et constituée sans stipulation particulière est donc

$$(145) \qquad X_a + \tfrac{1}{2}(1 - tX_a) = X_a(1 - \tfrac{1}{2}t) + \tfrac{1}{2}.$$

Exemple. — Quel est le prix d'une rente viagère de 1000 francs, sur une tête de 57 ans ?

L'annuité X_{57} est, d'après la Table de Deparcieux, égale à 105972 : le prix de la rente, ou le capital que l'on doit verser pour la constituer, est donc

$$10,5972 \times 0,98 + \tfrac{1}{2} = 10,885,$$

soit 10885 francs pour une rente de 1000 francs.

Dans tous les contrats de rentes viagères constituées par les Compagnies, il est stipulé que la Compagnie n'aura rien à payer pour les arrérages courus au jour du décès, ces arrérages ayant été rachetés d'avance. En conséquence, le prix d'une rente viagère de 1 franc, payable par années et constituée dans ces conditions, se réduit à X_a; telle est la prime unique, ou le capital que doit verser un rentier pour se constituer 1 franc de rente.

Quand la rente de 1 franc est payable, non par années, mais par fractions d'année, sa valeur est indiquée par la formule (53); en pratique, on ne divise le payement des

rentes qu'en semestres ou en trimestres ; la valeur d'une rente semestriellle est très-approximativement $X_a + \frac{1}{4}$, ou $X_a + 0^{fr},25$; et la valeur d'une rente trimestrielle $X_a + \frac{3}{8}$ ou $X_a + 0^{fr},37$, ainsi qu'on l'a vu, du reste, au n° 154.

Dans le langage ordinaire, on détermine généralement les rentes viagères par leur taux, c'est-à-dire par l'intérêt annuel que rapporte un capital de 100 francs, plutôt que par le prix de 1 franc de rente. Le taux viager à l'âge a ressort évidemment à $\frac{1}{X_a}$.

Exemple. — On demande à quelle rente viagère donnera droit le versement d'un capital de 10000 francs à l'âge de 57 ans.

L'annuité X_{57}, d'après la Table de Deparcieux, est égale à 10,5972 ; tel est donc le prix de 1 franc de rente. Quant au taux, il est égal à $\frac{1}{10,5972} = 0,09436$. Par conséquent un capital de 10000 francs versé donnera droit à une rente, payable par année, de $943^{fr},60$.

Si la rente doit être semestrielle, le prix de 1 franc de rente sera $10,597 + 0,25 = 10^{fr},847$, et la rente sera de 922 francs, payables à raison de 461 francs par semestre.

Si elle doit être trimestrielle, le prix de 1 franc de rente sera $10,597 + 0,37 = 10^{fr},967$, et la rente sera de 912 francs, payables à raison de 228 francs par trimestre.

Tarifs en usage, — Le tarif en usage dans les Compagnies françaises applique jusqu'à 60 ans les primes uniques calculées d'après Deparcieux ; mais, à partir de cet âge, il augmente progressivement ces primes, ainsi que nous l'indiquons dans le tableau ci-après.

Quelques Compagnies, ayant constaté qu'à partir de 66 ans la longévité des hommes est moins grande que celle des femmes, font usage pour les hommes, au delà de cet âge, d'un tarif un peu plus favorable : ainsi le prix d'une rente viagère de 1000 francs à 70 et à 80 ans, qui est pour une femme de 7866 et de 6345 francs, se réduit pour un homme à 7443 et à 5465 francs.

Quant au bénéfice fait sur la constitution d'une rente viagère en particulier, il est impossible de l'évaluer, car la mortalité des rentiers viagers français ne paraît se conformer ni à la Table de Duvillard, ni à aucune autre Table connue. Il est à désirer que les Compagnies d'assurances réunissent les renseignements qu'elles possèdent à cet égard depuis une cinquantaine d'années, et qu'elles établissent une Table de mortalité des rentiers viagers français, Table qui pourrait servir pour reviser le tarif, et pour fixer les bases sur lesquelles doivent être calculées les réserves de cette catégorie d'assurances.

En ce moment, on peut admettre que, même avec le tarif à 4 pour 100, les Compagnies ne font aucun bénéfice d'assurances sur les rentes viagères, ce qui tient à ce que les rentiers viagers sont des têtes très-choisies, dont la mortalité est faible. Tout au plus les Compagnies trouvent-elles une compensation dans les bénéfices de placement qu'elles peuvent réaliser, en plaçant les fonds qui leur sont versés à un taux supérieur à 4 pour 100.

RENTE VIAGÈRE.

Primes uniques, ou capitaux assurant une rente viagère de 1000 francs, payable par an.

AGE DU RENTIER.	D'APRÈS LA TABLE de Deparcieux.	D'APRÈS LE TARIF en vigueur.
50	12526 fr	12540 fr
55	11173	11176
60	9713	9887
65	8039	8836
70	6394	7866
75	4946	7106
80	3596	6345
85	2424	5720
90	1187	5400

Rentes viagères à capital réservé.

230. Un rentier qui voudrait se constituer une rente viagère, en stipulant que le capital versé serait restitué à son décès, n'aurait droit qu'à l'intérêt du capital versé, au taux admis pour les placements de fonds. La Compagnie qui contracterait avec lui ne ferait que se charger, pendant sa vie, de la gestion de ses fonds. Cette opération n'est pas usitée.

Mais un rentier peut demander que le capital versé lui soit restitué au bout d'un certain nombre d'années, s'il est vivant à cette époque : on peut alors lui allouer un taux d'intérêt plus élevé que le taux ordinaire, mais plus faible que le taux viager : voici comment on le déterminera.

Si l'on appelle x ce taux d'intérêt, la Compagnie aura à payer une annuité temporaire de x francs, dont la valeur est $x\frac{G_{a+1}-G_{a+n+1}}{T_a}$; d'un autre côté, l'engagement qu'elle prend de restituer le capital dans n années en cas de vie réduit la valeur actuelle du capital de 1 franc versé à

$$\frac{T_a - T_{a+n}}{T_a}.$$

En égalant ces deux expressions, on trouve, pour le montant du taux cherché,

$$(146)\qquad x=\frac{T_a-T_{a+n}}{G_{a+1}-G_{a+n+1}},$$

Exemple. — Un homme de 60 ans verse un capital de 10000 francs, à la condition que ce capital lui sera restitué dans 10 ans s'il est vivant ; on demande quel est le montant de la rente viagère qui pourra lui être servi pendant ces 10 ans.

Le taux sera donné par la formule

$$x=\frac{T_{60}-T_{70}}{G_{61}-G_{71}}=8,03.$$

La rente sera donc de 803 francs.

Cette opération ne répond à aucun besoin : elle n'est pas pratiquée.

Rente viagère sur deux têtes.

231. Une rente viagère sur deux têtes, payable jusqu'au premier décès seulement, n'est autre chose qu'une annuité viagère sur ces deux têtes, et a pour valeur $X_{a,b}$ (n° 155).

Une rente viagère sur deux têtes, payable jusqu'au dernier décès, a pour valeur (n° 161)

$$X_{\overline{a,b}} = X_a + X_b - X_{a,b}.$$

Souvent une rente viagère sur deux têtes est constituée avec cette condition qu'elle sera réduite, après le dernier décès, à une fraction k de son chiffre primitif. Elle a alors pour valeur

(147) $$k(X_a + X_b) + (1 - 2k) X_{a,b},$$

expression qui, si la rente est réductible à moitié, donne simplement

(148) $$\tfrac{1}{2}(X_a + X_b).$$

Exemple. — Calculer à quelle rente viagère donne droit un capital de 10000 francs sur deux têtes âgées de 56 et 66 ans, en supposant que la rente est payée jusqu'au premier décès, ou intégralement jusqu'au dernier décès, ou jusqu'au dernier décès, en se réduisant, à partir du premier décès, aux $\frac{2}{3}$ de sa valeur primitive.

En employant la Table de Deparcieux, on a

$$X_{56} = 10,891,$$
$$X_{66} = 7,691,$$
$$X_{56,66} = 6,316.$$

Par conséquent, 1 franc de rente viagère, dans les conditions ci-dessus, a pour valeur $6^{fr},316$, ou $12^{fr},266$, ou 10,283, et le capital de 10000 francs versé donnera une rente viagère

de 1583, ou de 815, ou de 974 francs par an, avec réduction à 649 francs après le décès.

Tarifs en usage. — Le tarif en usage dans les Compagnies françaises applique jusqu'à 60 ans les primes uniques calculées d'après Deparcieux; mais, à partir de cet âge, il augmente progressivement ces primes, ainsi que nous l'indiquons dans le tableau ci-après :

RENTE VIAGÈRE SUR DEUX TÊTES.

Primes uniques, ou capitaux assurant une rente viagère de 1000 francs, payable par année et jusqu'au dernier décès.

AGE COMMUN des deux rentiers.	D'APRÈS LA TABLE de Deparcieux.	D'APRÈS LE TARIF en vigueur.
50	15429	15424
60	12361	12408
70	8644	9780
80	5161	7081

Rentes viagères différées.

232. *Prime unique.* — La rente viagère différée, que nous avons définie ci-dessus, n'est autre chose qu'une annuité différée (n° 165). En appelant a l'âge actuel de celui qui la contracte et n le nombre d'années dont la jouissance est différée, sa valeur en prime unique est donc égale à

$$(149) \qquad X_a^n = X_{a+n}\, Q_a^n = \frac{G_{a+n+1}}{T_a}.$$

Cette formule suppose que la rente, quand elle sera acquise, sera payée par année; si, comme cela arrive généralement en pratique, on veut qu'elle soit payable par semestre, il faut remplacer X_{a+n} par $X_{a+n} + 0^{fr},25$ (*voir* n° 154), ce

qui donne pour la prime unique la valeur suivante :

(150) $$\frac{G_{a+n+1} + \frac{1}{4} T_{a+n}}{T_a}.$$

Primes annuelles. — Au lieu de payer une prime unique, on préfère généralement acquitter le prix de cette opération au moyen de primes annuelles, reposant sur la tête du contractant. Si ces primes doivent être payables pendant m années, on obtiendra leur valeur, d'après la formule (97), en divisant la prime unique par $1 + {}_{m-1}X_a$. Généralement, on prend m égal à n, de manière que l'entrée en jouissance de la rente coïncide avec le versement de la dernière prime, et que le payement d'arrérages ait lieu un an après. Il faut alors diviser la prime unique par $1 + {}_{n-1}X_a = \frac{G_a - G_{a+n}}{T_a}$, ce qui donne pour la prime annuelle

(151) $$\frac{G_{a+n+1}}{G_a - G_{a+n}},$$

si la rente est payable par année. Il est bon de remarquer que, la prime annuelle étant payable d'avance et la rente payable seulement en fin d'année, il n'y aura, à la fin de la $n^{ième}$ année, rien à payer et rien à recevoir; le premier terme de rente ne sera payé qu'à la fin de la $n + 1^{ième}$ année. S'il ne devait pas y avoir d'intermittence, et si le premier terme de rente devait être payé un an après le versement de la $n^{ième}$ prime, c'est-à-dire dans n années, la prime annuelle devrait être augmentée et fixée à

$$\frac{G_{a+n}}{G_a - G_{a+n}}.$$

Enfin, si la rente devait être payable par semestre ou par trimestre, la prime annuelle devrait être augmentée, comme la prime unique elle-même, et fixée, dans le premier cas, à

$$\frac{G_{a+n+1} + 0,25\, T_{a+n}}{G_a - G_{a+n}},$$

et dans le second cas, à

$$\frac{G_{a+n+1} + 0,37\, T_{a+n}}{G_a - G_{a+n}}.$$

Premier exemple. — Calculer la prime unique et la prime annuelle nécessaires pour constituer à un enfant, à sa naissance, une rente viagère de 1000 francs, dont il jouira à partir de l'âge de 40 ans.

Il faut faire $a = 0$ et $n = 40$, ce qui donne pour la prime unique

$$\frac{G_{41}}{T_0} = 1,524,$$

et pour la prime annuelle

$$\frac{G_{41}}{G_0 - G_{40}} = 0,113,$$

soit, pour une rente viagère de 1000 francs, une prime unique de 1524 francs, ou une prime annuelle de 113 francs.

Deuxième exemple. — Calculer la prime unique et la prime annuelle que doit verser un homme âgé de 30 ans, pour se constituer à partir de 62 ans une rente viagère de 1000 francs, payable par semestre.

Il faut faire $a = 30$ et $n = 32$, ce qui donne pour la prime unique

$$\frac{G_{63} + \frac{1}{4} T_{62}}{T_{30}} = 1,580,$$

et pour la prime annuelle

$$\frac{G_{63} + \frac{1}{4} T_{62}}{G_{30} - G_{62}} = 0,097,$$

soit, pour une rente viagère de 1000 francs, une prime unique de 1580 francs, ou une prime annuelle de 97 francs.

Tarif en usage. — Dans le tarif appliqué par les Compagnies françaises, les primes sont celles qui résultent de la Table de Deparcieux, sans augmentation ; cette catégorie d'opérations, comme celle des rentes viagères immédiates, ne donne pro-

bablement lieu à aucun bénéfice. Nous présentons dans le tableau ci-après un extrait de ce tarif.

RENTE VIAGÈRE DIFFÉRÉE.

Primes uniques et primes annuelles assurant une rente viagère différée de 1000 francs, payable par semestre et dont la jouissance commencera après 20 années.

AGE du contractant.	PRIME UNIQUE.	PRIME ANNUELLE.
21	5616^{fr}	432^{fr}
25	5232	404
30	4660	361
35	3999	311
40	3253	256

Rente viagère différée avec remboursement des primes.

233. *Prime unique.* — On peut se constituer une rente viagère différée en versant une prime unique et en convenant que cette prime unique sera remboursée au décès, à quelque époque qu'il arrive.

Dans ce cas, le contractant ne se dessaisit que de l'intérêt de la prime unique pendant la durée de sa vie; en appelant P cette prime, il faut donc modifier la formule (149) et écrire

$$\mathrm{P}\,t\,\mathrm{X}_a = \mathrm{X}_a^n,$$

d'où

(152) $$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{X}_a^n}{t\,\mathrm{X}_a} = \frac{\mathrm{G}_{a+n+1}}{t\,\mathrm{G}_{a+1}}.$$

Exemple. — Un homme de 25 ans veut se constituer une rente différée de 6000 francs, à partir de l'âge de 60 ans, à la condition que le capital versé sera restitué à sa famille lors de son décès. Quel doit être ce capital?

Il faut faire $a = 25$ et $n = 35$, ce qui donne

$$P = \frac{G_{61}}{0,04\, G_{26}} = 2,114,$$

soit 12684 francs pour une rente de 6000 francs.

Primes annuelles. — On peut demander encore d'acquitter le prix de la rente viagère différée au moyen de primes annuelles payables pendant n années, à la condition que le montant de toutes les primes versées sera remboursé au décès, à quelque époque qu'il arrive. On trouve alors, par un raisonnement analogue, que la prime annuelle doit être fixée à

(153) $$p = \frac{G_{a+n+1}}{t\,(G_{a+1} + G_{a+2} + \ldots + G_{a+n})}.$$

Exemple. — Pour constituer la même rente que dans l'exemple précédent, la prime annuelle, remboursable au décès, doit être fixée à

$$p = \frac{G_{61}}{0,04\,(G_{26} + G_{27} + \ldots + G_{60})} = 0^{\text{fr}},143,$$

soit une prime annuelle de 858 francs pour une rente de 6000 francs.

Si la prime unique versée pour constituer une rente viagère différée doit être restituée au moment de l'entrée en jouissance, ou de suite en cas de décès avant cette époque, on reconnaîtra facilement que le montant de cette prime unique doit être fixé à

(154) $$\frac{G_{a+n+1}}{t\,(G_{a+1} - G_{a+n+1})}$$

pour 1 franc de rente, soit 13848 francs dans l'exemple ci-dessus.

Enfin, si la prime unique versée doit être restituée au décès, mais seulement dans le cas où ce décès surviendrait avant l'entrée en jouissance de la rente, cette prime unique

doit être fixée à

$$(155) \qquad \frac{G_{a+n+1}}{T_{a+n} + t(G_{a+1} - G_{a+n+1})}$$

pour 1 franc de rente, soit 11 190 francs dans l'exemple ci-dessus.

Achat d'usufruit.

234. On appelle *usufruit* d'un capital ou d'une rente la jouissance de ce capital ou de cette rente pendant la vie d'une ou de plusieurs personnes déterminées; et *nue propriété* sa propriété à partir de l'extinction de l'usufruit, de sorte que l'usufruit et la nue propriété réunis constituent la propriété intégrale.

Un achat d'usufruit, fait par une Compagnie, est un placement de fonds, combiné avec une assurance en cas de décès, puisque c'est le décès de l'usufruitier qui doit faire subir une perte à la Compagnie. On doit donc, pour acheter un usufruit, faire subir un examen médical à la personne sur la tête de laquelle il repose, et adopter pour elle la *Table de mortalité* II^M.

On peut avoir à acheter l'usufruit d'une rente ou l'usufruit d'un capital; mais le premier cas peut seul être soumis au calcul : le second cas doit se ramener au premier par des considérations économiques ou légales. En effet, l'usufruit d'un capital n'a de valeur que suivant l'emploi que l'usufruitier est autorisé à en faire, suivant le produit annuel qu'il peut en retirer. Il faut donc chercher d'abord quel est ce produit annuel; et, quand ce produit a été déterminé, le calcul de l'usufruit du capital revient au calcul de l'usufruit d'une rente.

Usufruit d'une rente.

Le prix actuel de l'usufruit d'une rente de 1 franc est, d'après sa définition, égal à l'annuité sur la tête de l'usufruitier, calculée au taux ordinaire et avec la Table de mortalité H^M. On peut arriver au même résultat en remarquant que la Compagnie, en achetant un usufruit, se place dans la même position que si elle assurait pour la vie entière un capital égal au prix d'achat (payable en commencement d'année), sur la tête de l'usufruitier, et si elle le versait d'avance, en se privant de plus de recevoir la première prime. Dans ces conditions, une prime pure p (calculée avec cette condition que le capital sera payable au commencement de l'année du décès) n'assure qu'un capital $1-p$; et par conséquent, si t représente le taux d'intérêt admis pour le placement de fonds, le prix de l'usufruit d'une rente de 1 franc doit être

$$(156) \qquad \frac{1-p}{p+t}.$$

Si l'on remplace, dans cette expression, p par sa valeur tirée des formules (96) et (80), on retrouve précisément l'annuité X.

Il ne s'agit ici, si t est égal à 4 pour 100, que d'un prix net, calculé sans chargement, c'est-à-dire sans aucune marge pour payer les frais et former le bénéfice de la Compagnie. Si celle-ci l'adoptait comme prix d'achat, elle réaliserait un placement de fonds à 4 pour 100, et une assurance à la prime pure; elle devrait donc se considérer comme ne faisant ni perte ni bénéfice. Pour former le bénéfice, on peut retrancher du prix net ainsi calculé une somme quelconque, que la Compagnie détermine comme elle l'entend. Si celle-ci veut établir son prix d'achat de manière que le capital déboursé par elle se trouve placé, pendant la durée de l'usufruit, à un taux déterminé t, il suffit d'introduire cette valeur de t dans la formule (156). Si l'on veut, en outre, que la partie de l'opéra-

tion qui constitue l'assurance en cas de décès comporte un chargement pour la prime, il faudra prendre pour p dans cette même formule la prime du tarif au lieu de la prime pure.

Exemple. — Quel est la valeur de l'usufruit d'une rente de 1000 francs, reposant sur une tête de 30 ans ?

La valeur nette, sans chargement, est égale à l'annuité sur une tête de 30 ans, soit 17131 francs.

Si l'on veut que l'opération donne un bénéfice de 4000 francs, on fixera le prix d'achat à 13131 francs. Si l'on veut que le capital déboursé rapporte 6 pour 100, on le fixera à

$$1000 \frac{1 - 0{,}01736}{0{,}01736 + 0{,}06} = 12702^{\text{fr}}.$$

Si l'on veut que le capital déboursé rapporte 6 pour 100, et qu'en même temps l'assurance qui fait partie de l'opération soit faite d'après le tarif C, on prendra pour p la prime du tarif C. Le prix cherché sera alors

$$1000 \frac{1 - 0{,}0214}{0{,}0214 + 0{,}06} = 12022^{\text{fr}}.$$

Achat d'un usufruit temporaire.

235. Le prix actuel de l'usufruit d'une rente de 1 franc, payable pendant n années au plus, est égal à l'annuité temporaire de n années sur la tête de l'usufruitier. On peut arriver au même résultat par le raisonnement suivant : la Compagnie se place dans la même position que si, d'une part, elle assurait un capital sur la tête de l'usufruitier pendant n années, et le payait d'avance, en se privant de recevoir la première prime, et si, d'autre part, elle recevait la somme qui représente la valeur actuelle du capital assuré dans l'hypothèse où l'usufruitier serait vivant dans n années. Une prime ${}_n p_a$ n'assurant dans ces conditions qu'un capital $1 - {}_n p_a$, le

prix de l'usufruit d'une rente temporaire de 1 franc doit être, si t représente le taux de l'intérêt,

$$(157) \qquad \frac{(1 - {}_np_a)(1 - Q_a^n)}{{}_np_a + t}.$$

Si l'on remplace, dans cette expression, ${}_np_a$ par sa valeur tirée de la formule (97), et multipliée préalablement par $1 + t$ pour tenir compte de ce que le capital est payable en commencement d'année, on retrouve l'annuité ${}_nX_a$.

La Compagnie ne réalise ainsi, si t est égal à 4 pour 100, qu'un placement de fonds à ce taux, et une assurance à la prime pure. Pour former le chargement, on peut retrancher du prix net ainsi calculé une somme arbitraire; ou, si l'on veut que le capital déboursé par la Compagnie se trouve placé, pendant la durée de l'opération, à un taux supérieur à 4 pour 100, on prendra ce taux pour la valeur de t; ou enfin, si l'on veut que la partie de l'opération qui constitue l'assurance en cas de décès comporte un chargement pour la prime, on prendra pour p la prime du tarif au lieu de la prime pure.

Exemple. — Quelle est la valeur de l'usufruit d'une rente de 1000 francs pendant 10 ans, reposant sur une tête de 35 ans ?

La valeur nette, sans chargement, est égale à l'annuité ${}_{10}X_{35}$, soit 7716 francs.

Si l'on veut que l'opération rapporte un bénéfice de 2000 francs, on fixera le prix d'achat à 5716 francs. Si l'on veut que le capital déboursé rapporte 6 pour 100 pendant les 10 ans, on prendra $t = 0,06$, ce qui donne, en prenant pour ${}_{10}p_{35}$ la valeur 0,0096 calculée au n° 202, multipliée par 1,04, soit 0,01,

$$1000\,\frac{0,99(1 - 0,61)}{0,01 + 0,06} = 5516^{\text{fr}}.$$

Si enfin l'on veut que le capital déboursé rapporte 6 pour 100, et qu'en même temps l'assurance qui fait partie de l'opération

se trouve faite au tarif C, on prendra pour la prime d'assurance la prime de ce tarif : $0{,}0187 \times 1{,}04 = 0{,}019$, et la formule (157) donnera pour le prix d'achat

$$1000 \frac{(1-0{,}019)(1-0{,}61)}{0{,}019+0{,}06} = 4843^{fr}.$$

Achat de nue propriété.

236. Un achat de nue propriété, fait par une Compagnie, est un placement de fonds combiné avec une assurance en cas de vie, puisque c'est la vie prolongée de l'usufruitier qui doit faire subir une perte à la Compagnie. Pour acheter une nue propriété, on n'a donc aucune visite médicale à faire subir à l'usufruitier, et l'on doit adopter pour lui la Table de mortalité de Deparcieux.

On peut avoir à acheter la nue propriété d'un capital ou celle d'une rente ; mais le premier cas peut seul être soumis au calcul : le second doit se ramener au premier par des considérations économiques ou légales. En effet, si celui qui a acheté une nue propriété ne doit entrer en possession que d'une rente à l'extinction de l'usufruit, comme l'usage universel est d'estimer les valeurs par l'importance des capitaux qu'elles représentent, et non par l'importance de leurs revenus, il sera obligé alors, et il est obligé dès à présent, d'estimer à quel capital correspond la rente dont il sera appelé à jouir.

Cette évaluation, faite au moment de l'achat, c'est-à-dire longtemps avant l'époque, d'ailleurs incertaine, où l'on entrera en possession, entraîne souvent une grande incertitude dans le calcul du prix cherché. Si, par exemple, il s'agit de la nue propriété d'une rente 5 pour 100 de 5000 francs sur l'État français, valant aujourd'hui 106000 francs (au cours de 106 francs), il faut estimer d'abord quelle sera sa valeur en capital, le jour de l'extinction de l'usufruit. Si l'on croit pouvoir admettre que le crédit de l'État s'améliorera d'ici là, que le taux d'intérêt baissera, et que le 5 pour 100 vaudra alors

110 francs, la rente de 5000 francs représentera un capital de 110000 francs. Si, au contraire, on suppose que, par suite de réductions sur la rente, ou de tout autre événement, la valeur sur laquelle on peut compter pour le titre de rente, à l'extinction de l'usufruit, n'est pas supérieure à 100000 francs, c'est le capital de 100000 francs qui devra être pris pour base du calcul. La recherche de la valeur de la nue propriété d'une rente se trouve donc toujours ramenée au calcul de la valeur de la nue propriété d'un capital.

Nue propriété d'un capital.

La Compagnie qui achète la nue propriété d'un capital de 1 franc est privée du revenu de ce capital pendant la vie de l'usufruitier, revenu dont la valeur est $t\mathrm{X}$; la valeur de la nue propriété est donc

$$1 - t\mathrm{X}; \tag{158}$$

c'est du reste la prime unique de l'assurance du capital de 1 franc, payable au commencement de l'année du décès de l'usufruitier. En achetant la nue propriété pour la somme ci-dessus déterminée, la Compagnie réaliserait pour le capital qu'elle débourse un placement au taux t, et une assurance sans chargement.

Pour former le chargement, on peut retrancher du prix d'achat, ainsi calculé, une somme quelconque, que la Compagnie détermine comme elle l'entend. Si l'on veut fixer le prix d'achat, de manière que le capital déboursé par la Compagnie se trouve placé pendant la durée de l'usufruit, à un taux déterminé θ supérieur à t, on reconnaîtra facilement que la valeur de la nue propriété ci-dessus calculée, $1 - t\mathrm{X}$, doit être égale au prix d'achat, augmenté de l'intérêt de ce prix au taux $\theta - t$, pendant la vie de l'usufruitier, et qu'ainsi ce prix d'achat doit être fixé à

$$\frac{1 - t\mathrm{X}}{1 + \mathrm{X}(\theta - t)}. \tag{159}$$

Exemple. — Quelle est la valeur de la nue propriété d'un capital de 10000 francs, dont l'usufruit repose sur une tête de 30 ans?

La valeur nette sans chargement est de

$$10000(1-0{,}04\times16{,}809)=3276^{\text{fr}}.$$

Si l'on veut que l'opération donne un bénéfice de 1000 francs, on fixera le prix d'achat à 2276 francs; si l'on veut que le capital déboursé rapporte 6 pour 100, on le fixera à

$$\frac{3276}{1+16{,}809(0{,}06-0{,}04)}=2452^{\text{fr}}.$$

Deuxième exemple. — On trouve dans une succession deux usufruits, reposant sur une tête de 30 ans, et portant le premier sur un titre de rente française 5 pour 100 de 5000 francs, et le second sur une ferme estimée 106000 francs : on demande à quels prix doivent être estimés, pour chacun d'eux, l'usufruit et la nue propriété.

Comme il n'y a de bénéfice à rechercher d'aucun côté, il convient d'adopter la Table de mortalité de Deparcieux et le taux d'intérêt de 4 pour 100. La valeur du premier usufruit sera donc

$$5000\,X_{30}=84050^{\text{fr}},$$

et si la rente 5 pour 100 est cotée 106 francs, la valeur de la nue propriété sera

$$106000-84050=21950^{\text{fr}}.$$

Pour estimer la valeur du second, on recherchera quel revenu net on peut admettre pour la ferme en question; si ce revenu net est de $3\frac{1}{2}$ pour 100, ou 3710 francs, la valeur de l'usufruit sera

$$3710\,X_{30}=62365^{\text{fr}},$$

et la valeur de la nue propriété sera

$$106000-62365=43635^{\text{fr}}.$$

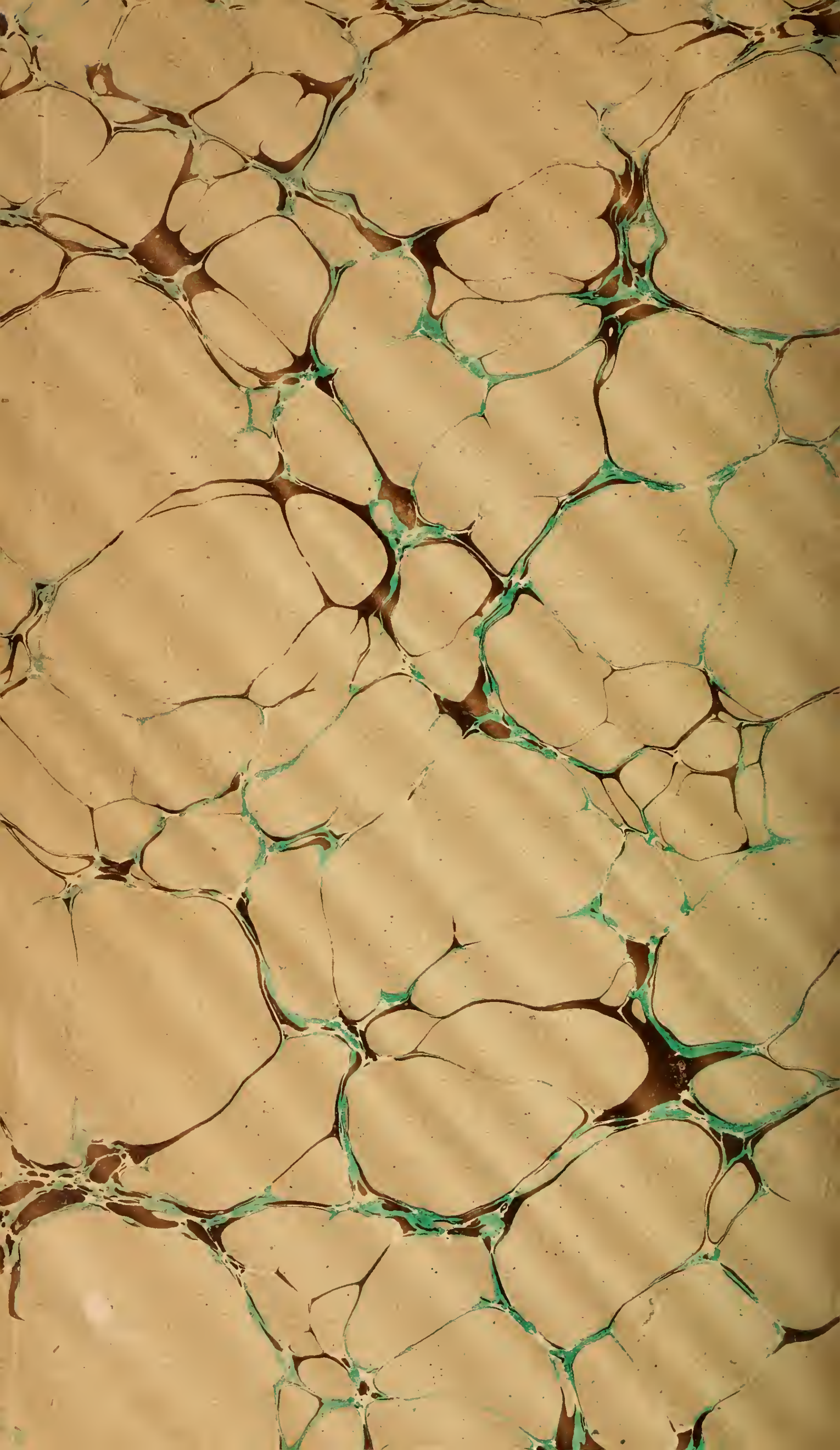
Si l'on cherchait directement le prix de la nue propriété d'après la formule (158), en y faisant $t = 3\frac{1}{2}$ pour 100, on retrouverait la même valeur; mais cette valeur ne serait que de 34726 francs, si l'on prenait $t = 4$ pour 100, c'est-à-dire si le nu propriétaire faisait cette hypothèse que le capital dont il n'a pas la jouissance immédiate rapporterait entre ses mains 4 pour 100 d'intérêt.

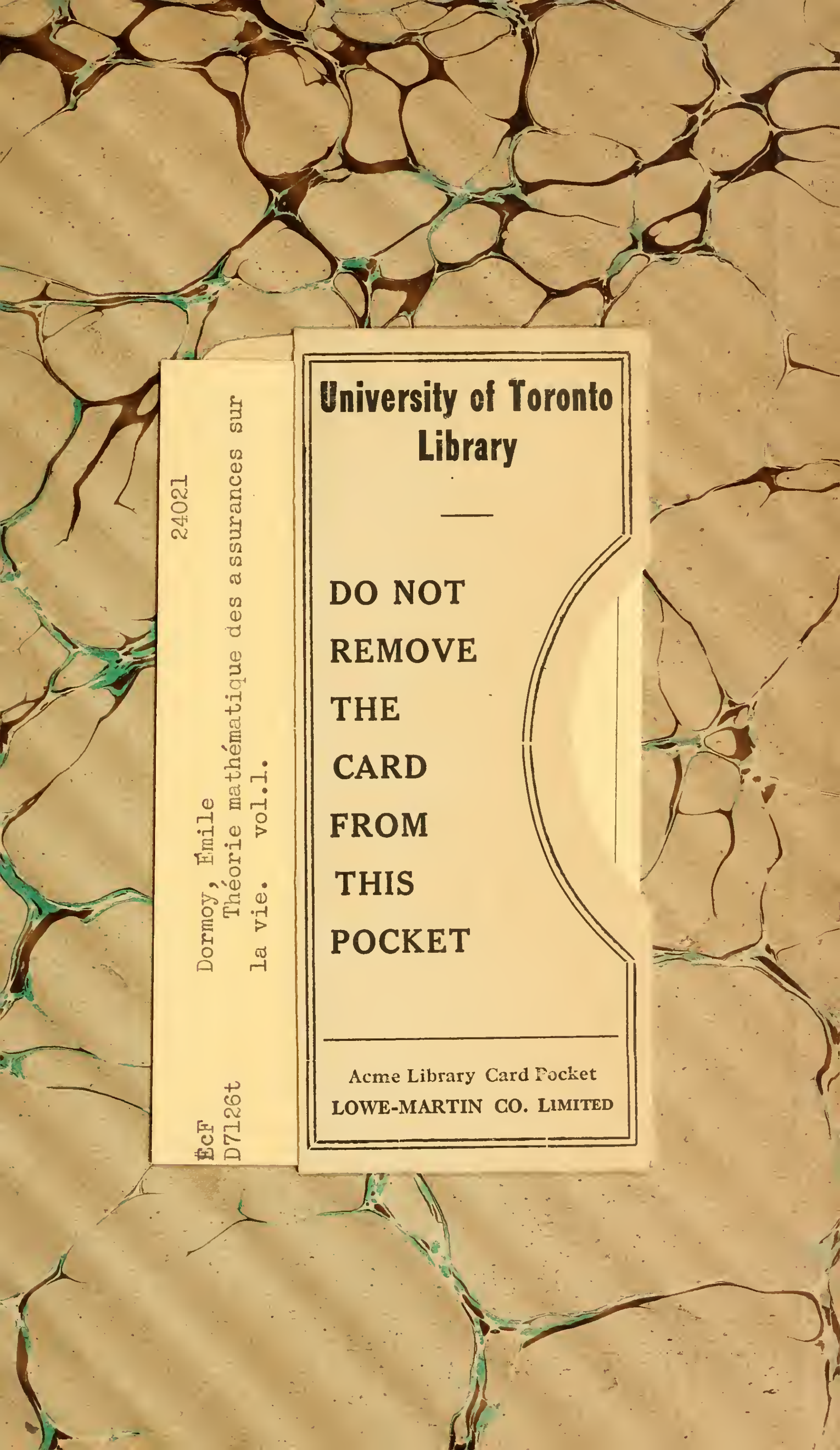
On voit donc qu'en pratique la valeur des usufruits et des nues propriétés dépend entièrement du mode de placement qui est adopté pour le capital, et du taux d'intérêt que l'on considère comme normal.

Tarifs en usage. — Il n'y a pas de tarif général pour les achats d'usufruits et de nues propriétés. Ces affaires sont souvent exposées à devenir contentieuses, comme toutes celles dans lesquelles la Compagnie débourse un capital et se met ainsi à découvert, pour avoir des droits à faire valoir dans un avenir éloigné. Le prix d'achat dépend donc, dans chaque cas particulier, de la nature de l'affaire et de la solidité des garanties offertes : plus ces garanties sont satisfaisantes, et plus on peut diminuer le chargement à ajouter au prix net calculé. Les affaires de ce genre sont du reste peu pratiquées, précisément à cause des risques de contentieux dont elles sont inséparables.

FIN DU PREMIER VOLUME.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.




University of Toronto
Library
DO NOT
REMOVE
THE
CARD
FROM
THIS
POCKET
Acme Library Card Pocket
LOWE-MARTIN CO. LIMITED
24021
Dormoy, Emile
Théorie mathématique des assurances sur
la vie. vol.1.
EcF
D7126t

